Département de Math.
Fac. des Sciences
U.A.B.-Tlemcen

T. P. N° 1

1) Recherche du minimum (ou max.) local d'1 fonction numérique à 1 variable, sur $\mathbb{R}$
La fonction étant continue et dérivable sur l'intervalle de recherche du min.

a) Cherchons par exemple, le min global de

$$f(x) = e^x - \frac{x^2}{2} - 2x \quad \text{sur } \mathbb{R}^+ ;$$

f étant continue et dérivable sur $\mathbb{R}^+$ on peut chercher sa dérivée $f'(x)$ et le min de f sur $\mathbb{R}^+$ est t.q. $f'(x) = 0$ c.à.d. $e^x - x - 2 = 0$ ($f''(x) = e^x - 1 \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow$ il s'agit d'1 min) c'est 1 équation algébrique que l'on peut ~~résoud~~ résoudre par plusieurs méthodes numériques : méthode bissection, de pt fixe, de Newton Raphson, etc ~~à condition~~ sous réserve que les conditions d'application de ces méthodes soient vérifiées.

La méthode de bissection ou de Dichotomie ne nécessitant aucune condition d'application (sauf peut être la continuité de f) on peut l'utiliser pour chercher au moins l'intervalle aussi petit que possible où se situera le min. de f sur $\mathbb{R}^+$:

thm I.V.T. : f étant 1 fonction continue sur $[a,b]$ et $f(a).f(b) < 0$ alors $f(x) = 0$ possède au moins 1 solution ds $]a,b[$ c.à.d. $\exists\, \alpha \in]a,b[\,/\, f(\alpha) = 0$

Question 1 : Ds $\mathbb{R}^+$ trouver 1 intervalle de longueur 1 contenant le min. de f.

Suite de l'énoncé du T. P. 1

Question 1 (suite) Autrement dit, il faut trouver 1 intervalle de longueur 1 ($\ell([a,b]) = b-a = 1$) contenant la solution de $f'(x) = 0$ ds $\mathbb{R}^+$

Question 2 : Utilisant la méthode de Dichotomie (ou bissection) chercher la solution optimale (min.) de f sur l'intervalle de longueur 1 trouvé ds la question 1.

b) Idem pour $f_N(x) = e^x - \frac{N}{2}x^2 - 2x$ où $N \in \mathbb{N}^*$
Seulement la question 1 doit être remplacée par : montrer que la solution optimale de f sur $\mathbb{R}^+$ reste toujours ds l'intervalle $[1, N+1]$. ($N \in \mathbb{N}^*$)

c) $g(x) = \frac{15}{4}x^4 + \frac{14}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 - 6x$

Q1| M.q. g possède 1 sol. optimale ds $[0,1]$

Q2| Vérifier s'il s'agit d'1 max. ou d'1 min. ($g''(x)$?)

Q3| Par la méthode de Dichotomie, chercher 1 approximation de cette sol. opt. de g sur $[0,1]$

Q4| vérifier aussi que -1 est sol. opt. (min.) de g sur $[-1.5, 0.8]$ et confirmer avec le plot

d) Idem pour $h(x) = \frac{x^2}{2} - \sin x$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

$h'(x) = x - \cos x$ sur $[0, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow h''(x) = 1 + \sin x \geq 0$ $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow h$ admet 1 min. ds $[0, \frac{\pi}{2}]$

$g(x) = \frac{15}{4}x^4 + \frac{14}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 - 6x \Rightarrow g'(x) = 15x^3 + 14x^2 - 7x - 6$ sur $[0,1]$

$g''(x) = 45x^2 + 28x - 7$ $\quad \Delta' = 14^2 - 45(-7) = 196 + 315 = 511$

$x_1 = \frac{-14 - \sqrt{511}}{45}$ $\quad x_2 = \frac{-14 + \sqrt{511}}{45}$

x	-1	x_1	0	x_2	1
$g''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

45 × 7 = 315
196 + 315 = 511

T. P. N° 2

2) Recherche du minimum (ou max.) Local (ds $\mathbb{R}$) pour une fonction numérique à 1 variable pas nécessairement continue

La plus simple des méthodes numériques de recherche de l'optimum est certainement la méthode de Dichotomie (qui n'est pas, sans doute, la plus efficace)

Ds cette méthode, on suppose que la fonction objective f est unimodale sur $[a,b]$: C'est à dire qu'elle ne possède qu'1 max. (ou min.) ds $[a,b]$: Intervalle de recherche de l'optimum de f noté $(\hat{x},\hat{y})$

Procédure dichotomique :

$$x_1 = \frac{a+b}{2} - \frac{\varepsilon}{2} \quad x_2 = \frac{a+b}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$ (ε ; longueur séparant x_1 de x_2)

ε est choisie assez petite (ex: $\frac{b-a}{20}$) t.q. la différence $f(x_1) \neq f(x_2)$ significative

Si, par ex., on cherche un maximum, on peut envisager 3 éventualités :

(i) $f(x_1) > f(x_2)$ alors l'abscisse $\hat{x}$ de l'optimum $\in [a, x_2]$

(s'il s'agit d'1 min. alors $f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow \hat{x} \in [a, x_2]$)

(ii) $f(x_1) < f(x_2)$ alors $\hat{x} \in [x_1, b]$

(s'il s'agit d'1 min alors $f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow \hat{x} \in [x_1, b]$)

(iii) $f(x_1) = f(x_2)$ cas impossible à cause du Choix de ε.

Ds les 2 cas, on aura déterminé 1 nouvel intervalle dont la longueur est $L_2 = \frac{L_1}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$ ds lequel on procèdera de la m̂ façon pour choisir x_3 et x_4 séparés par $\varepsilon/2$ du centre du nouvel intervalle (soit $[a, x_2]$, soit $[x_1, b]$). Suivant les éventualités définies précédemment, ns déterminons 1 intervalle de Longueur L_3 tel que : $L_3 = \frac{L_2}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$

En réitérant ce procédé (dichotomie) n-1 fois, l'intervalle d'incertitude (l'intervalle final où se trouverait l'optimum) aura pour longueur

$$L_n = \frac{L_1}{2^{n-1}} + \frac{\varepsilon}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-2}}\right) = \frac{L_1}{2^{n-1}} + \varepsilon\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

T.P. 2 (suite)

Pour pouvoir comparer les méthodes de recherche de l'optimum d'1 fonction ds 1 intervalle aussi réduit que possible, on utilise le nombre N d'évaluations de f(x) nécessaires pour réduire l'intervalle d'incertitude de L_1 à L_n.

On appellera rapport de réduction la grandeur

$$R = \frac{L_n}{L_1} = \frac{L_n}{L_{n-1}} \cdot \frac{L_{n-1}}{L_{n-2}} \cdots \frac{L_i}{L_{i-1}} \cdots \frac{L_2}{L_1} = \prod_{i=2}^{n} \frac{L_i}{L_{i-1}}$$

Concernant la méthode dichotomique décrite ci-dessus à chaque itération, on réalise deux évaluations de f(x). Aussi, au bout de (n-1) itérations $N = 2(n-1)$

Comme $L_n = \frac{L_1}{2^{n-1}} + \varepsilon\left(1 - \frac{1}{2^{(n-1)}}\right) \Rightarrow L_n - \varepsilon = \frac{1}{2^{(n-1)}}(L_1 - \varepsilon)$

$\Rightarrow 2^{(n-1)} = \frac{L_1-\varepsilon}{L_n-\varepsilon} \Rightarrow (n-1)\ln 2 = \ln\left(\frac{L_1-\varepsilon}{L_n-\varepsilon}\right) \Rightarrow n-1 = \frac{1}{\ln 2}\ln\left(\frac{L_1-\varepsilon}{L_n-\varepsilon}\right)$

Si, à chaque itération, on réalise deux évaluations de f(x), le nbre total de ces évaluations est : $N = 2(n-1) = \frac{2}{\ln 2}\ln\left(\frac{L_1-\varepsilon}{L_n-\varepsilon}\right)$

Soit $N = 2,89 \ln\left(\frac{L_1-\varepsilon}{L_n-\varepsilon}\right)$

Applications

1 - fonction unimodale discontinue sur $[a, b] = [0, 2\pi]$

$$f(x) = \begin{cases} -x + 1 + \frac{\pi}{2} & \text{si } x \in [0, \pi/2] \\ \cos x & \text{si } x \in]\pi/2, 3\pi/2[\\ x + 1 - \frac{3\pi}{2} & \text{si } x \in [3\pi/2, 2\pi] \end{cases}$$

a) S'agit-il d'1 min. ou d'1 max. à rechercher ds [a, b]

b) Utiliser la méthode dichotomique (pour fctions discont.) pour rechercher l'optimum de f sur [a, b] (ε donné t.q $L_n - \varepsilon > 0$)

c) Evaluer le nbre N d'évaluations de f pour $R = 0.02 = \frac{1}{50}$

($L_1 = b - a \Rightarrow L_n = \frac{b-a}{50} = \frac{2\pi}{50} = 0.04\pi$ si par ex. $\varepsilon = 0.02\pi$

2 - Idem pour $g(x) = \max\left(\frac{1}{x}, x\right)$ sur $[0.1, 2] = [a, b]$

3 - Idem pour $h(x) = \min(5 - x, e^{x/2})$ sur $[a, b] = [0, 5]$

Ds le contexte de 2) : Recherche de l'optimum Local ds $\mathbb{R}$ pour 1 fction numérique à 1 variable pas nécessairement continue, on propose d'autres méthodes plus efficaces : Méthode des sous-intervalles égaux : au moins Trichotomie

A) Trichotomie

Comme ds la méthode précédente, on évalue deux fois la fonction $f(x)$ en x_1 et x_2 $(x_1 \neq x_2)$ t.q. $x_1 = a + \frac{b-a}{3}$ et $x_2 = a + \frac{2}{3}(b-a)$

Si $L_1 = \text{long}([a,b]) = b-a$ alors $x_1 = a + \frac{L_1}{3}$ et $x_2 = a + \frac{2}{3}L_1$. On calcule alors $f(x_1)$ et $f(x_2)$, on procède ensuite de la m façon que pour la méthode de Dichotomie pour situer l'optimum $\hat{x}$:

$\hat{x} \in [a, x_2]$ ou $\hat{x} \in [x_1, b]$ selon que : Voir le test ((i), (ii), (iii)) de la procédure dichotomique (page 1 du T.P. N° 2)

Ce faisant la longueur L_1 de l'intervalle $[a,b]$ est réduite à $L_2 = \frac{2}{3}L_1$

Ré-itérant le procédé de partitionnement, on obtient 1 nouvel intervalle de longueur L_3 contenant $\hat{x}$ t.q. $L_3 = \frac{2}{3}L_2$.

Après $(n-1)$ itérations, le sous-intervalle de longueur L_n vérifiera :

$$L_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} L_1 \Rightarrow \frac{L_n}{L_1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \Rightarrow \ln\left(\frac{L_n}{L_1}\right) = (n-1)\ln\left(\frac{2}{3}\right) \Rightarrow n-1 = \frac{\ln(L_n/L_1)}{\ln(2/3)}$$

A chaque itération, on réalise deux évaluations de la fonction.

Au total on aura N évaluations telles que : $N = 2(n-1)$.

La relation entre le rapport de réduction $(R = L_n/L_1)$ et le nbre d'évaluations N est donc :

$$N = 2\ln(L_n/L_1)/\ln(2/3) = 4.92\ln\left(\frac{L_1}{L_n}\right) = 4.92\ln(1/R)$$

Applications

Dans 1 but de comparaison entre méthodes, on reprendra les mêmes applications considérées ds la méthode dichotomique. (Seulement ds le cas de la trichotomie il n'y a pas de ε)

Il faut remarquer que ces méthodes supposent la fonction objective strictement monotone de part et d'autre de l'optimum $(\hat{x}, \hat{y})$. Il appartient aux étudiants de réfléchir à la façon de remédier au pb si jamais la fction présenterait 1 constance ds 1 sous-intervalle : $[c,d] \subset [a,b]$ t.q. $(\hat{x},\hat{y}) \notin [c,d]$.

B) Méthode de Fibonacci

Pour simplifier la compréhension de cette méthode on suppose que la fonction objective f admet 1 minimum unique ds l'intervalle $[a,b]=[a_0,b_0]$. Cette méthode est basée sur le procédé suivant : Deux points c et d ($a<c<d<b$) sont placés symétriquement ds l'intervalle initial $[a,b]$. Ce dernier est réduit à l'intervalle $[a,d]$ ou $[c,b]$ (c.à.d. $[a_1,b_1]=[a,d]$ aux (xor) $[c,b]$) selon que $f(c)<f(d)$ ou $f(c)>f(d)$ (si $f(c)=f(d)$ on choisit indifféremment $[a_1,b_1]=[a,d]$ ou (or) $[c,b]$).
Ainsi nous obtenons ds la 1ère itération l'intervalle réduit $[a_1,b_1]$ qui contiendra le min. unique de f. On procède de la m̂ façon pour les itérations svtes jusqu'à ce que la longueur de l'intervalle minimal $[a_n,b_n]$ devient $<\varepsilon$ (tolérence donnée).
Pour la recherche de Fibonacci, on place les pts c et d ds l'intervalle initial $[a_0,b_0]$ selon le processus svt : On

On cherche le premier nombre de Fibonacci F_n t.q. $F_n > L/\varepsilon$ où $L=\text{long.}([a_0,b_0])=b-a$ et ε une tolérence donnée.
(Rappel de la suite F_n de Fibonacci : $F_0=F_1=1$ et $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$).
Pour la 1ère itération c et d st données par les combinaisons convexes : $c=\dfrac{F_{n-1}a+F_{n-2}b}{F_n}$ $d=\dfrac{F_{n-2}a+F_{n-1}b}{F_n}$, et en supposant qu'on trouve, après plusieurs itérations de réduction de l'intervalle où f admet 1 min. unique, l'intervalle $[a_k,b_k]$, on définit alors t_k et t'_k t.q.

$$\begin{cases} t_k=\dfrac{F_{n-2-k}}{F_{n-k}}(b_k-a_k)+a_k=\dfrac{F_{n-1-k}\,a_k+F_{n-2-k}\,b_k}{F_{n-k}} \quad (1) \quad \left(\text{Si } k=0 \text{ on retrouve } t_0=c\right) \\ \boxed{k=0,\dots,n-2} \\ t'_k=\dfrac{F_{n-1-k}}{F_{n-k}}(b_k-a_k)+a_k=\dfrac{F_{n-2-k}\,a_k+F_{n-1-k}\,b_k}{F_{n-k}} \quad (2) \quad \left(\text{Si } k=0 \text{ on retrouve } t'_0=d\right) \end{cases}$$

avec $F_k=F_{k-1}+F_{k-2}$ $F_0=F_1=1$

A ce niveau, on calcule les valeurs $f(t_k)$ et $f(t'_k)$:

- Si $f(t_k)<f(t'_k)$ alors $[a_k,t'_k]$ contient le min. de f

- Si $f(t_k) > f(t'_k)$ alors $[t_k, b_k]$ contient le min. de f
- Si $f(t_k) = f(t'_k)$ alors le min. de f est ds $[a_k, t'_k]$ ou $[t_k, b_k]$

On a alors: ds le 1er cas $[a_{k+1}, b_{k+1}] = [a_k, t'_k]$
ds le 2nd cas $[a_{k+1}, b_{k+1}] = [t_k, b_k]$
ds le dernier cas $[a_{k+1}, b_{k+1}] = [a_k, t'_k]$ ou $[t_k, b_k]$ indifférem.

$\ell([a_{k+1}, b_{k+1}]) = t'_k - a_k = b_k - t_k$

Quelques nbres de Fibonacci: $F_0 = F_1 = 1$, $F_2 = F_1 + F_0 = 2$, $F_3 = F_2 + F_1 = 3$, $F_4 = F_3 + F_2 = 3+2 = 5$, $F_5 = F_4 + F_3 = 5+3 = 8$, $F_6 = F_5 + F_4 = 8+5 = 13$, $F_7 = F_6 + F_5 = 13+8 = 21$, $F_8 = F_7 + F_6 = 21+13 = 34$, $F_9 = F_8 + F_7 = 34+21 = 55$,

$\underbrace{\ell([a_1, b_1])}_{} = t'_0 - a_0 = b_0 - t_0 = \frac{F_{n-1}}{F_n}(b_0 - a_0) + a_0 - a_0 = \frac{F_{n-1}}{F_n}(b_0 - a_0)$ ($k=0$ ds(2))

$\Rightarrow\ = b_1 - a_1 = \frac{F_{n-1}}{F_n}(b_0 - a_0)$, De m̂ $b_2 - a_2 = \frac{F_{n-2}}{F_{n-1}}(b_1 - a_1)$, ($k=1$ ds(2))

$b_3 - a_3 = \frac{F_{n-3}}{F_{n-2}}(b_2 - a_2)$ ($k=2$ ds(2)), ..., $b_{n-1} - a_{n-1} = \frac{F_{n-1-(n-2)}}{F_{n-(n-2)}}\underbrace{(b_{n-2} - a_{n-2})}_{} = \frac{F_1}{F_2}(\ )$

D'où $b_{n-1} - a_{n-1} = \frac{F_1}{F_2}\frac{F_2}{F_3}(b_{n-3} - a_{n-3}) = \frac{F_1}{F_2}\frac{F_2}{F_3}\cdots\frac{F_{n-2}}{F_{n-1}}\frac{F_{n-1}}{F_n}(b_0 - a_0)$ ($k = n-2$ ds(2))

$$= \frac{F_1}{F_n}(b_0 - a_0) = \frac{1}{F_n}(b_0 - a_0) = \frac{1}{F_n}(b - a) = \frac{1}{F_n} L$$

Si on veut que $b_{n-1} - a_{n-1} < \varepsilon$ donné alors il faut choisir n t.q $b_{n-1} - a_{n-1} = \frac{L}{F_n} < \varepsilon$ c.à d. $F_n > L/\varepsilon$. Si par exemple $\varepsilon = 0.01 = 1/100$ et $[a, b] = [a_0, b_0] = [0, 1] \Rightarrow L = 1$ alors la question est de trouver n t.q le $n^{\text{ième}}$ nbre de Fibonacci: $F_n > \frac{1}{0.01} = 100$
(le plus petit nbre de Fibonacci plus grand que 100)

On a déjà déterminé $F_2, F_3, \ldots, F_9 = 55$, $F_{10} = F_9 + F_8 = 55 + 34 = 89$
$F_{11} = F_{10} + F_9 = 89 + 55 = 144 > 100 \Rightarrow n = 11$.

$L_n = \ell([a_{n-1}, b_{n-1}]) = b_{n-1} - a_{n-1} = \frac{1}{F_n} L = \frac{b-a}{F_n} \Rightarrow R = \frac{L_n}{L} = \frac{1}{F_n}$

Applications:

Les m̂ exercices que pour les méthodes dichotomiques

Rem. Il appartient aux étudiants d'essayer de comparer la méthode de Fibonacci aux méthodes dichotomiques pour 1 m̂ rapport de réduction R après avoir déterminé le nbre N correspondant aux évaluations de f sur [a, b].

Remarque concernant la méthode de Fibonacci :

Mis à part la $1^{\text{ère}}$ itération où il y a 2 évaluations de la fonction f : $f(c)$ et $f(d)$ où c et d sont 2 combinaisons convexes conjuguées des bornes a & b de l'intervalle initial $[a,b]$:

$$c = \frac{F_{n-1}a + F_{n-2}b}{F_n} = t_0 \quad (*c) \qquad \text{et} \qquad d = \frac{F_{n-2}a + F_{n-1}b}{F_n} = t'_0 \quad (*d)$$

On remarquera alors que pour les itérations svtes, il n'y aura qu'une seule évaluation de f : Si, par exemple, $a_1 = a$ et $b_1 = d$ $\big(f(c) < f(d)\big)$ constituent les bornes de l'intervalle (de recherche du min.) de la 2^{nde} itération alors on peut montrer que le nouveau d (t'_1) pour cette itération (c.à.d. t'_1) n'est autre que l'ancien $c = t_0$: $t'_1 = c = t_0$ et donc $f(t'_1) = f(t_0) = f(c)$ déjà évaluée au cours de la $1^{\text{ère}}$ itération. Ceci dit, le nouveau c (c.à.d. t_1) par cette $2^{\text{ième}}$ itération est calculé, tout simplement comme suit : $t_1 = a_1 + b_1 - t'_1$

$$= a + d - c = a + t'_0 - t_0$$

Montrons alors cela pour la 2^{nde} itération : $a := a \quad b := d$ $\quad (a_1 = a_0 \quad b_1 = d = t'_0)$ $\Rightarrow$ $d := c$ et $c := a + b - d$ $\quad (t'_1 = c = t_0 \quad t_1 = a_1 + b_1 - t'_1)$

Pour l'itération svte : $d = \dfrac{F_{n-3}a_1 + F_{n-2}b_1}{F_{n-1}} = t'_1$ il suffit alors de montrer que $\underset{t_0}{c} = \dfrac{F_{n-3}a + F_{n-2}d}{F_{n-1}}$ (c.à.d. on montre que $t'_1 = c$)

sachant que, par déf. de la méthode de Fibonacci, ns avons : $c = \dfrac{F_{n-1}a + F_{n-2}b}{F_n}$ (Voir $(*c)$) et que $(*d) \Rightarrow b = \dfrac{F_n d - F_{n-2}a}{F_{n-1}}$.

En remplaçant ds $(*c)$: $c = \dfrac{F_{n-1}^2 a + F_{n-2}(F_n d - F_{n-2}a)}{F_n \cdot F_{n-1}} = \cdots/\ldots$

$$C = \frac{(F_{n-1}^2 - F_{n-2}^2)a + F_n F_{n-2} d}{F_n F_{n-1}} = \frac{(F_{n-1}+F_{n-2})(F_{n-1}-F_{n-2})a + F_n F_{n-2} d}{F_n F_{n-1}}$$

Or $F_{n-1} + F_{n-2} = F_n$ et $F_{n-1} = F_{n-2} + F_{n-3}$ c. à d. $F_{n-1} - F_{n-2} = F_{n-3}$

Ds ce cas C s'écrit comme $C = \frac{F_n F_{n-3} a + F_n F_{n-2} d}{F_n F_{n-1}} = \frac{F_{n-3} a + F_{n-2} d}{F_{n-1}}$

c. à d. que t'_1 (le nouveau d ds la 2^nde^ itération) n'est autre que l'ancien C (calculé ds la 1ère itération) c. à. d. t_0.

Il faut à présent montrer que le nouveau C (c. à d. t_1 qu'il faudra calculer ds la 2nde itération) n'est autre que :

$$t_1 = \text{nouveau } C = a + b - d = a_1 + b_1 - \underbrace{t'_1}_{\text{nouveau } d = \text{ancien } C} \quad (\text{ancien } d)$$

Ds le cas général ns avons si C ($=t_1$) et d ($=t'_1$) st deux combi-naisons convexes conjuguées de a ($=a_1$) et b ($=b_1$) :

$C = \alpha a + (1-\alpha) b$ et $d = (1-\alpha) a + \alpha b$ avec $\alpha \in]0.5, 1[$

($\Rightarrow$ C se trouve du côté de a et d du côté de b), alors

$$C - a = \alpha a + (1-\alpha) b - a = (\alpha - 1) a + (1-\alpha) b = (1-\alpha)(b-a)$$

et $b - d = b - (1-\alpha) a - \alpha b = b(1-\alpha) - (1-\alpha) a = (1-\alpha)(b-a) = C - a$

$C - a = b - d \Leftrightarrow C = a + b - d$. c.q.f.d.

Pour les combinaisons convexes de Fibonacci $\alpha = \frac{F_{n-1}}{F_n} \in]0{,}5, 1[$ $(n \geq 2)$

car $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ ($F_{n-2} < F_{n-1} < F_n < \cdots$ $n \geq 3$)

$\alpha = \frac{F_{n-1}}{F_n} > \frac{F_{n-2}}{F_n} = 1 - \alpha$ Donc si, par l'absurde, ns supposons que $\alpha \leq 0.5$ alors $1-\alpha < \alpha \leq 0.5 \Rightarrow 1 - \alpha < 0.5$ et ds ce cas $1 = \alpha + (1-\alpha) < 0.5 + 0.5 = 1$ Contradiction

Rem. : Si, au départ, nous avons $f(t_0) = f(C) > f(d) = f(t'_0)$ alors nous aurons $a_1 = C = t_0$ et $b_1 = b$ et ds ce cas :

le nouveau point à calculer est $t'_1 = d\,(\text{nouveau}) = a_1 + b_1 - C\,(\text{nouveau})$
$= a_1 + b_1 - t_1$

C (nouveau) $= d$ (ancien) $= t'_0$ ($= t_1$)

Ds ce cas aussi nous avons qu'1 seule évaluation de f par itération sauf pour la 1ère.

C) Méthode du nbre d'or

C'est 1 méthode considérée comme 1 variante de la méthode de Fibonacci : La longueur L_i du $i^{ème}$ intervalle (ds la pro-cédure de réduction) est calculée selon la récurrence suite :

$$L_i = L_{i-2} - L_{i-1} \quad \left(L_i < L_{i-1} < L_{i-2} \text{ avec } L_1 = \ell([a,b]) \text{ où } [a,b] \text{ est l'intervalle de départ} \right)$$

$(L_i > 0 \ \forall i)$

Si, à travers les itérations, on impose que le rapport de réduction reste constant : $\alpha = \dfrac{L_i}{L_{i-1}} = \dfrac{L_{i-1}}{L_{i-2}} = c^{\underline{te}}$

Remplaçant α ds l'équation récurrente précédente, on obtient

$$\frac{L_i}{L_{i-1}} = \frac{L_{i-2}}{L_{i-1}} - 1 \text{ c.à d. } \alpha = \frac{1}{\alpha} - 1 \iff \alpha^2 + \alpha - 1 = 0$$

dont la solution positive est le nbre d'or : $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.618 = \alpha$

Principe de la méthode

Partant de l'intervalle $[a_1, b_1] = [a, b]$ sur lequel la fonction uni-modale admet 1 max. unique ou 1 min. unique, on procède à la réduction de l'intervalle contenant l'abscisse de l'optimum $(\hat{x}, \hat{y})$ comme suit : $\dfrac{L_2}{L_1} = \alpha \Rightarrow L_2 = \alpha L_1 = 0.618 L_1 < L_1$ où $L_1 = \ell([a_1, b_1])$ et $L_2 = \ell([a_2, b_2])$

On choisit alors x_1 et x_1' ds $[a_1, b_1]$ t.q.

$x_1 = b_1 - L_2$ et $x_1' = a_1 + L_2$ $\quad (L_2 = \alpha L_1 = 0.618 L_1 > 0.5 L_1 \Rightarrow x_1 \in [a_1, m_1]$ où $m_1 = (a_1 + b_1)/2$ et $x_2 \in [m_1, b_1])$

Par construct. $x_1 < x_1'$

Si, par exemple, on cherche 1 max. $(\hat{x}, \hat{y}) \in [a, b]$ alors on a :

si $f(x_1) > f(x_1')$ alors $\hat{x} \in [a_1, x_1']$

si $f(x_1) < f(x_1')$ " $\hat{x} \in [x_1, b_1]$

Donc $[a_2, b_2] = [a_1, x_1']$ ou $[x_1, b_1]$ selon que $f(x_1) > f(x_1')$ ou $f(x_1) < f(x_1')$

S'il s'agit d'1 min. ds $[a,b]$ alors
$f(x_1) < f(x_1') \Rightarrow \hat{x} \in [a_1, x_1'] = [a_2, b_2]$
$f(x_1) > f(x_1') \Rightarrow \hat{x} \in [x_1, b_1] = [a_2, b_2]$
si $[a_2, b_2] = [a_1, x_1']$ alors $L_2 = \ell([a_2, b_2]) = \ell([a_1, x_1']) = x_1' - a_1 = L_2 = b_1 - x_1$

Ds ts les cas $\ell([a_2, b_2]) = b_2 - a_2 = x_1' - a_1 = b_1 - x_1 = L_2$ (C'est l'itération 2)

De m̂ à l'itération k : On fabrique $[a_k, b_k]$ connaissant L_k

$L_k = L_{k-1} \cdot \alpha = 0.618 L_{k-1} < L_{k-1}$ $\left(L_k > (1/2) L_{k-1}\right)$ où $L_{k-1} = \ell([a_{k-1}, b_{k-1}])$

$x_{k-1} = b_{k-1} - L_k$ et $x_{k-1}' = a_{k-1} + L_k$ $(x_{k-1} < x_{k-1}')$

Recherche d'1 max. ds $[a_{k-1}, b_{k-1}]$:
Si $f(x_{k-1}) > f(x'_{k-1})$ alors $\hat{x} \in [a_{k-1}, x_{k-1}]$
Si $f(x_{k-1}) < f(x'_{k-1})$ alors $\hat{x} \in [x_{k-1}, b_{k-1}]$

S'il s'agit d'1 min.
Si $f(x_{k-1}) < f(x'_{k-1}) \Rightarrow \hat{x} \in [a_{k-1}, x_{k-1}]$
Si $f(x_{k-1}) > f(x'_{k-1}) \Rightarrow \hat{x} \in [x_{k-1}, b_{k-1}]$

Au bout de n itérations ($n = 1 + \ln R / \ln \alpha$) $\hat{x} = \frac{x_n + x'_n}{2}$ $\hat{y} = f(\hat{x})$

Rappelons la valeur de $R = \frac{L_n}{L_1} = \prod_{i=2}^{n} \frac{L_i}{L_{i-1}} = \frac{L_n}{L_{n-1}} \cdot \frac{L_{n-1}}{L_{n-2}} \cdot \cdots \cdot \frac{L_2}{L_1} = \prod_{i=2}^{n} \alpha = \alpha^{n-1}$

$\Rightarrow \ln R = (n-1)\ln \alpha \Rightarrow n-1 = \frac{\ln R}{\ln \alpha} \Rightarrow n = 1 + \ln R / \ln \alpha = 1 + \ln R / \ln 0.618$

le nbre d'itérations n est donc déterminé par la donnée de R : rapport de réduction global.

Remarque 1 Il appartient aux étudiants de montrer que $\forall k = \overline{1, n}$ $x_k < x'_k$ en montrant que x_k et x'_k sont deux combinaisons convexes de a_k et b_k avec x_k proche de a_k et x'_k proche de b_k (Ce sont 2 combinaisons convexes conjuguées de a_k et b_k)

Remarque 2 : Comme pour la méthode de Fibonacci, ds cette méthode il y a aussi qu'1 seule évaluation de la fction f par itération (sauf la 1ère itérat.) Il appartient alors aux étudiants de montrer cela et de déduire, au cours des itérations, x_k en fction de x'_k (ou l'inverse) comme pour la méthode de Fibonacci :

$x_k = a_k + b_k - x'_k$ ou bien $x'_k = a_k + b_k - x_k$