

Epreuve finale d'Algèbre 4.

Exercice n°①

durée : 2 heures

Soit $q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la forme quadratique définie dans la base canonique $\{e_i\}$ de \mathbb{R}^3 par $q(x) = x_1^2 - 2x_2x_3 - x_1x_3$.

1/ Déterminer $M(q)$; $\text{rg}(q)$, $\text{sgn}(q)$ et $N(q)$.

2/ Déterminer une base $\{v_i\}$ de \mathbb{R}^3 orthogonale pour q ainsi qu'une base orthonormée (si elle existe).

3/ Déterminer $M(q)_{v_i}$ et indiquer une autre méthode pour trouver $\text{sgn}(q)$.

Exercice n°②

Soit $q: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ la forme quadratique définie dans la base canonique par $q(x) = (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 + \lambda(x_2 - 2x_3 + x_4)^2 + x_3x_4$. Discuter suivant le réel λ le rang et la signature de q .

Exercice n°③

a/ Soit E un K -espace vectoriel et $s: E \times E \rightarrow K$ une forme bilinéaire non dégénérée, montrer que :

$$[s(x, z) = s(y, z) \quad \forall z \in E] \Rightarrow x = y.$$

b/ Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et q une forme quadratique sur E , on note s la forme polaire de q .

① Montrer qu'il existe un et un seul endomorphisme f_s de E tel que :

$$\langle x, f_s(y) \rangle = s(x, y) \quad \forall x, y \in E$$

② Montrer que f_s est symétrique.

Exercice n°④

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie n , muni d'une forme quadratique q , s la forme polaire de q et $\{e_1, \dots, e_n\}$ une famille orthogonale de vecteurs non isotropes de E . Montrer que $\{e_1, \dots, e_n\}$ est libre.

Exercice n°⑤

Soit E un espace euclidien de dimension 1, x_1, x_2, x_3 3 vecteurs de E . Montrer qu'il est impossible que $\forall i, j \in \{1, 2, 3\}, i \neq j \quad \langle x_i, x_j \rangle < 0$

Ex1: 7pt Ex2: 3pt Ex3: 5pt Ex4: 3pt Ex5: 2pt

Bon lomage et Bonnes Vacances pour ceux qui se passent de cette page

