Université de Tlemcen.
Département de mathématiques
Algèbre 3

le 14/03/2011

Epreuve finale. durée : 2 heures

Exercice n° 1

Soit E un K espace vectoriel de dimension finie n, f un endomorphisme de E.
Montrer que si f est diagonalisable alors il existe un polynôme scindé, annulateur de f et ayant des racines simples.

Exercice n° 2

Trigonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ en précisant la matrice de passage.

Exercice n° 3

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a/ Montrer que $P_A(\lambda) = (-1)^n(\lambda - (n-1))(\lambda+1)^{n-1}$.

b/ Montrer que A est diagonalisable.

c/ En déduire le polynôme minimal de A

Exercice n° 4

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ $(n>1)$ tel que $\dim \operatorname{Im} f = 1$,
$A = M(f)_{e_i}$ $\{e_i\}$ étant la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
Montrer que A est diagonalisable si $\operatorname{Tr} A \neq 0$

Exercice n° 5

Soit E un K espace vectoriel, f un endomorphisme de E tel que $f^3 = I_d$.
Montrer que $E = \operatorname{Ker}(f - I_d) \oplus \operatorname{Ker}(f^2 + f + I_d)$

Exercice n° 6

Soit $A = \left(\begin{array}{c|c} O_n & I_n \\ \hline -I_n & O_n \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{2n}$

1/ Montrer que $A^2 = -I_{2n}$.

2/ Montrer que A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$

Bon Courage

Université de Tlemcen
Département de mathématiques

le 13/09/2011.

Rattrapage de Algèbre 3.

durée : 2 heures.

Exercice n° 1

Soit E un espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E.
Montrer que la famille $\{I_d, f, \dots, f^{n^2}\}$ est liée.

Exercice n° 2

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}$ $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Calculer ${}^tA.A$, en déduire $\det A$.

Exercice n° 3

1/ Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

a/ A est elle diagonalisable ?

b/ Trigonaliser A en précisant la matrice de passage et résoudre $\frac{dX}{dt} = AX$

2/ Soit $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Mettre sous forme de Jordan B et calculer B^n

Exercice n° 4

Soit E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E tel que $f^3 = I_d$.
Montrer en utilisant le lemme fondamental que

$$E = \mathrm{Ker}(f - I_d) \oplus \mathrm{Ker}(f^2 + f + I_d).$$

Exercice n° 5

Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ et φ l'application définie par

$$\varphi : E \longrightarrow E$$
$$f \longmapsto \varphi(f) = F \quad \text{où } F(x) = \int_0^x f(t).dt.$$

1/ Montrer que φ est linéaire, injective et non surjective.

2/ Que peut on dire de dim E

Exercice n° 6

Soit E un K espace vectoriel de dimension n, f un endomorphisme de E, $P_f(x)$ scindé dans K.
Montrer que si f est diagonalisable pour chaque valeur propre λ_i de multiplicité α_i $\dim E_{\lambda_i} = \alpha_i$

Bon Courage

Université de Tlemcen.
Département de mathématiques.

le 20/02/2012.

Epreuve finale d'Algèbre 3.

durée 2 heures.

Exercice n°(1)

Soit E un K espace vectoriel de dimension finie n, f un endomorphisme de E, λ une valeur propre de f de multiplicité α.
Montrer que $\dim E_\lambda \leq \alpha$.

Exercice n°(2)

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ (x)

1°/ A est elle diagonalisable ? 2°/ Trigonaliser A en précisant la matrice de passage. 3°/ Résoudre $\frac{dX}{dt} = A X$

Exercice n°(3)

Soit $a, b \in \mathbb{R}^*$ tels que $|a| \neq |b|$ et $A = \begin{pmatrix} a & b & a & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & a \\ a & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & a & b & \cdots & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$. (avec $n \geq 2$).

1°/ Calculer rg A, en déduire que 0 est une valeur propre de A et déterminer $\dim E_0$.

2°/ Montrer que les vecteurs $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^{2n}$ sont des vecteurs propres de A, en déduire que A est diagonalisable.

Exercice n°(4)

Soit E un $\mathbb{C}$ espace vectoriel de dimension n, f un endomorphisme de E.
Montrer que f est nilpotent ($\exists p \in \mathbb{N}^* / f^p = 0$) ssi $Sp(f) = \{0\}$.

Exercice n°(5)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - A^2 + A - I = 0$
Quelles sont les valeurs propres possibles de A.

Bon Courage

Université de Tlemcen.
Département de mathématiques

le 28/01/2014.

Epreuve finale de Algèbre 3.

durée : 2 heures.

Exercice n° 1

Soit E un K espace vectoriel de dimension n, f un endomorphisme de E

1°/ Montrer que si f est trigonalisable dans K alors $P_f(x)$ est scindé dans K.

2°/ Montrer que $P_f(x)$ et $m_f(x)$ ont les mêmes racines.

Exercice n° 2

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1°/ A est elle diagonalisable ?, 2°/ Trigonaliser A en précisant la matrice de passage, 3°/ Résoudre $\frac{dX}{dt} = AX$.

Exercice n° 3

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1°/ Déterminer $m_A(x)$; 2°/ Montrer que A est inversible et en déduire de 1°/ A^{-1}

3°/ Calculer $A^6 - 3A^5 + 4A^4 - 4A^3 + 3A^2$

Exercice n° 4

Déterminer toutes les matrices A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $A^3 - 3A^2 + 3A - I = 0$

Exercice n° 5

Soit A une matrice carrée à coefficients réels telle que $A^2 + I = 0$, montrer que A n'a pas de valeurs propres réelles.

Exercice n° 6

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par :

$$f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$
$$M \longmapsto f(M) = A.M$$

Montrer que si $A^2 = A$ alors f est diagonalisable.

Exercice n° 7

Soient $a, b \in \mathbb{R}^*$ tels que $|a| \neq |b|$ et $A = \begin{pmatrix} a & b & a & b \\ b & a & b & a \\ a & b & a & b \\ b & a & b & a \end{pmatrix}$

Calculer $\operatorname{rg} A$, en déduire que 0 est une valeur propre de A et déterminer $\dim E_0$

Barème : exercice ① : 3,5 pt ; exercice ② : 5 pt ; exercice ③ : 3,5 pt, exercice ④ : 2 pt
exercice ⑤ : 1,5 pt ; exercice ⑥ : 2,5 pt ; exercice ⑦ : 2 pt

Bon Courage

Université de Tlemcen
Département de mathématiques.

le 11/02/2016.

Epreuve finale de Algèbre 3

durée : 2 heures.

exercice n°1

Soit E un K espace vectoriel de dimension finie n, f un endomorphisme de E, montrer que si f est diagonalisable, il existe un polynôme unitaire, n'ayant que des racines simples et qui annule f.

exercice n°2

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1°/ A est elle diagonalisable ?

2°/ Trigonaliser A et résoudre $\frac{dX}{dt} = AX$

3°/ Soit $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, mettre sous forme de Jordan B et calculer B^n.

exercice n°3

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & 1+a \end{pmatrix}$; $a \in \mathbb{R}$.

1°/ Pour quelles valeurs de a, A est elle diagonalisable ?

2°/ Lorsque A est diagonalisable, déterminer une matrice $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ inversible et une matrice A' diagonale telles que $A' = P^{-1}AP$.

exercice n°4

Soit $\mathcal{E}$ l'espace vectoriels des matrices réelles d'ordre 2 à trace nulle, c'est à dire $\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} ; a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$.

1°/ Déterminer une base β de $\mathcal{E}$

2°/ Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{E}$ défini par :

$$f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}.$$
$$M \longmapsto f(M) = M.B - B.M.$$

Déterminer $C = M(f)_\beta$, C^n et $f^n(A)$ où $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$.

exercice n°5

Soit E un K espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E tel que $\begin{cases} f^3 - 3f^2 + 2f = 0 \\ f^8 + 16f^4 = 0 \end{cases}$

Déterminer $m_f(x)$ et que peut-on en déduire pour f.

Barème : Ex1 : 3,5pts ; Ex2 : 6,5pts ; Ex3 : 3pts ; Ex4 : 5,5pts ; Ex5 : 2,5pts Total = 21pts.

Bon Courage