

Epreuve finaledurée : 2 heuresExercice n° ①

Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie n , f un endomorphisme de E .

Montrer que si f est diagonalisable alors il existe un polynôme scindé, annulateur de f et ayant des racines simples.

Exercice n° ②

Triagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ en précisant la matrice de passage.

Exercice n° ③

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a/ Montrer que $P_A(\lambda) = (-1)^2(\lambda - (2-1))(\lambda + 1)^{2-1}$.

b/ Montrer que A est diagonalisable.

c/ En déduire le polynôme minimal de A .

Exercice n° ④

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ ($n > 1$) tel que $\dim \text{Im } f = 1$,

$A = M(f)_{e_i}$ $\{e_i\}$ étant la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Montrer que A est diagonalisable si $\text{Tr } A \neq 0$.

Exercice n° ⑤

Soit E un K -espace vectoriel, f un endomorphisme de E tel que $f^3 = \text{Id}$.

Montrer que $E = \text{Ker}(f - \text{Id}) \oplus \text{Ker}(f^2 + f + \text{Id})$.

Exercice n° ⑥

Soit $A = \left(\begin{array}{c|c} 0_n & I_n \\ \hline -I_n & 0_n \end{array} \right) \in \mathcal{M}_{2n}$

1/ Montrer que $A^2 = -I_{2n}$.

2/ Montrer que A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

Bon Courage 

Rattrapage de Algèbre 3.

durée: 2 heures.

Exercice n°1

Soit E un espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E .
Montrer que la famille $\{Id, f, \dots, f^{n-1}\}$ est liée.

Exercice n°2

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix} \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Calculer ${}^tA \cdot A$, en déduire $\det A$.

Exercice n°3

1/ Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

a/ A est-elle diagonalisable?

b/ Trigonaliser A en précisant la matrice de passage et résoudre $\frac{dX}{dt} = AX$

2/ Soit $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Mettre sous forme de Jordan B et calculer B^n

Exercice n°4

Soit E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E tel que $f^3 = Id$.
Montrer en utilisant le lemme fondamental que

$$E = \text{Ker}(f - Id) \oplus \text{Ker}(f^2 + f + Id).$$

Exercice n°5

Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$
et γ l'application définie par

$$\gamma: E \longrightarrow E$$

$$f \longmapsto \gamma(f) = F \quad \text{où} \quad F(x) = \int_0^x f(t) \cdot dt.$$

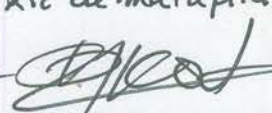
1/ Montrer que γ est linéaire, injective et non surjective.

2/ Que peut-on dire de $\dim E$?

Exercice n°6

Soit E un K -espace vectoriel de dimension n , f un endomorphisme de E ,
 $p_f(x)$ son polynôme caractéristique dans K .

Montrer que si f est diagonalisable pour chaque valeur propre λ_i de multiplicité $\dim E_{\lambda_i} = \lambda_i$

Bon Courage 

Epreuve finale d'Algèbre 3.

durée : 2 heures.

Exercice n°(1)

Soit E un K space vectoriel de dimension finie n , f un endomorphisme de E , λ une valeur propre de f de multiplicité α .
Montrer que $\dim E_\lambda \leq \alpha$.

Exercice n°(2)

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ (2)

1°/ A est elle diagonalisable ? 2°/ Trigonaliser A en précisant la matrice de passage. 3°/ Résoudre $\frac{dx}{dt} = Ax$

Exercice n°(3)

Soit $a, b \in \mathbb{R}^*$ tels que $|a| \neq |b|$ et $A = \begin{pmatrix} a & b & a & \dots & b \\ b & a & b & \dots & a \\ a & b & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & a & b & \dots & a \end{pmatrix} \in GL_n(\mathbb{R})$.
(avec $n \geq 2$).

1°/ Calculer $\text{rg} A$, en déduire que 0 est une valeur propre de A et χ déterminer $\dim E_0$.

2°/ Montrer que les vecteurs $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^{2n}$ sont des vecteurs propres de A , en déduire que A est diagonalisable.

Exercice n°(4)

Soit E un $\mathbb{C}$ space vectoriel de dimension n , f un endomorphisme de E .
Montrer que f est nilpotent ($\exists p \in \mathbb{N}^* / f^p = 0$)ssi $\text{Sp}(f) = \{0\}$.

Exercice n°(5)

Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - A^2 + A - I = 0$
Quelles sont les valeurs propres possibles de A .

Bon Courage 

Epreuve finale de Algèbre 3

durée: 2 heures.

Exercice n° ①

- Soit E un K espace vectoriel de dimension n , f un endomorphisme de E
- 1°/ Montrer que si f est trigonalisable dans K alors $P_f(x)$ est scindé dans K .
 - 2°/ Montrer que $P_f(x)$ et $m_f(x)$ ont les mêmes racines.

Exercice n° ②

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

- 1°/ A est elle diagonalisable ?
- 2°/ Trigonaliser A en précisant la matrice de passage,
- 3°/ Résoudre $\frac{dX}{dt} = AX$.

Exercice n° ③

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- 1°/ Déterminer $m_A(x)$;
- 2°/ Montrer que A est inversible et en déduire de 1°/ A^{-1}
- 3°/ Calculer $A^6 - 3A^5 + 4A^4 - 4A^3 + 3A^2$

Exercice n° ④

Déterminer toutes les matrices A de $M_2(\mathbb{R})$ telles que $A^3 - 3A^2 + 3A - I = 0$

Exercice n° ⑤

Soit A une matrice carrée à coefficients réels telle que $A^2 + I = 0$, montrer que A n'a pas de valeurs propres réelles.

Exercice n° ⑥

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et f l'endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$ défini par :

$$f: M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow M_n(\mathbb{R}).$$

$$M \longmapsto f(M) = A \cdot M$$

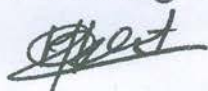
Montrer que si $A^2 = A$ alors f est diagonalisable.

Exercice n° ⑦

Soient $a, b \in \mathbb{R}^*$ tels que $|a| \neq |b|$ et $A = \begin{pmatrix} a & b & a & b \\ b & a & b & a \\ a & b & a & b \\ b & a & b & a \end{pmatrix}$

Calculer $\text{rg} A$, en déduire que 0 est une valeur propre de A et déterminer $\dim E_0$

Barème: exercice ①: 3,5 pt; exercice ②: 5 pt; exercice ③: 3,5 pt; exercice ④: 2 pt
exercice ⑤: 1,5 pt; exercice ⑥: 2,5 pt; exercice ⑦: 2 pt

Bon Courage 

Epreuve finale de Algèbre 3.

durée: 2 heures.

exercice n°1

Soit E un K espace vectoriel de dimension finie n , f un endomorphisme de E , montrer que si f est diagonalisable, il existe un polynôme scindé, n'ayant que des racines simples et qui annule f .

exercice n°2

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1°/ A est elle diagonalisable?

2°/ Trigonaliser A et résoudre $\frac{dX}{dt} = AX$

3°/ Soit $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, mettre sous forme de Jordan B et calculer B^n .

exercice n°3

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & 1+a \end{pmatrix}; a \in \mathbb{R}$$

1°/ Pour quelles valeurs de a , A est elle diagonalisable?

2°/ Lorsque A est diagonalisable, déterminer une matrice $P \in GL_2(\mathbb{R})$ inversible et une matrice A' diagonale telles que $A' = P^{-1}AP$.

exercice n°4

Soit E l'espace vectoriel des matrices réelles d'ordre 2 à trace nulle, c'est à dire $E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}; a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$.

1°/ Déterminer une base β de E

2°/ Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de E défini par:

$$f: E \longrightarrow E.$$

$$M \longmapsto f(M) = M \cdot B - B \cdot M.$$

Déterminer $C = M(f)_{\beta}$, C^n et $f^n(A)$ où $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$.

exercice n°5

Soit E un K espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E tel que $\begin{cases} f^3 - 3f^2 + 2f = 0 \\ f^8 + 16f^4 = 0 \end{cases}$

Déterminer $m_f(x)$ et que peut-on en déduire pour f .

Barrême: Ex1: 3,5pt; Ex2: 6,5pt; Ex3: 3pt; Ex4: 5,5pt; Ex5: 2,5pt Total = 21pt.
Bon Courage