U. A. B. T. 2015/2016

Département de Mathématiques

T.P Test d'analyse numérique 2

Exercice

On considère le système tridiagonal triangulaire inférieur suivant:

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & a_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c_1 & b_2 & a_3 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & c_2 & b_3 & a_4 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & c_{n-2} & b_{n-1} & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$$

1. Ecrire une fonction Matlab qui résoud ce problème:

   function x=tritinf(a,b,c,d)

   Vous n'utiliserez pas la fonction matlab \.

2. **Application**, Résoudre le système suivant:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 6 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Problème

1. La fonction Matlab suivante pour la méthode d'Euler contient quelques erreurs identifier les et corriger les.

```
function [ t,y ] = euler( f,a,b,y0,n )
% Cette fonction résoud le problème y'=f(t,y)
% avec la condition initiale y(a)=y0
% En utilisant n étapes de la méthode d'Euler
h=(b-a)/n;
t=a:h:b;
y(a)=y0;
for j=1:n
y(j)=y(j-1)+h*f(t(i-1),y(i-1));
end
```

2. On considère le problème de Cauchy suivant:

$$(P) \qquad \begin{cases} y'(t) = \cos(2y(t)), & t \in [0,1] \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

dont la solution exacte est $y(t) = \frac{1}{2} \arcsin \dfrac{e^{4t}-1}{e^{4t}+1}$.

Dans un script appeleuler.m, tracer dans la figure 1, en noir la courbe représentant la solution exacte de (P) ainsi que les valeurs approchées obtenues par la fonction euler , avec des cercles rouges.

3. Modifier la fonction Euler précédente, pour écrire une fonction RK3 qui résoud un problème de Cauchy avec la méthode de Runge-Kutta d'ordre 3 donnée par:

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h(\frac{1}{6}k_1 + \frac{2}{3}k_2 + \frac{1}{6}k_3) \\ \text{où} \\ k_1 = f(t_n, y_n) \\ k_2 = f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1) \\ k_3 = f(t_n + h, y_n - hk_1 + 2hk_2) \end{cases}$$

4. Dans un script appelrk3, tracer dans la figure 2, en vert la courbe représentant la solution exacte de (P) ainsi que les valeurs approchées obtenues par la fonction RK3 , avec des triangles bleus.

5. Dans un script comparaison.m, calculer les erreurs globales $e(n) = \max_i |y(t_i) - y_i|$ obtenues à partir des méthodes d'Euler et Runge-Kutta d'ordre 3 appliquées au problème (P), puis dans la figure 3 , représenter dans le même graphe ces erreurs, à l'aide de la fonction Matlab semilogy (les erreurs en fonctions de n) Conclure.

On prendra $n = 10 : 10 : 100$