Université de Tlemcen
Département de mathématiques

le 23/06/2010

Epreuve finale de Algèbre 4

Exercice n° 1

durée : 2 heures.

a/ Soit E un K space vectoriel et $s : E\times E \longrightarrow K$ une forme bilinéaire non dégénerée, montre que

$$s(x,z) = s(y,z)\ \forall z\in E \implies x = y$$

b/ Soit $(E, <,>)$ un space euclidien et q une forme quadratique sur E, on note s la forme polaire de q.

1° Montrer qu'il existe un et un seul endomorphisme f_s de E tel que:

$$<x, f_s(y)> = s(x,y)\ \forall x,y\in E$$

2° Montrer que si v_i et v_j sont 2 vecteurs propres de f_s orthogonaux pour <,> alors ils sont orthogonaux pour s.

Exercice n° 2

Soit $q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ la forme quadratique définie dans la base canonique par $q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3$.

a/ Determinez une base de $\mathbb{R}^3$ orthogonale pour q

b/ Determiner $rg(q)$, $sign(q)$ et $I(q)$.

Exercice n° 3

Soit (E,q) un space vectoriel muni d'une forme quadratique q, s sa forme polaire, F et G 2 sous spaces vectoriels de E

1/ Montrer que $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$

2/ Montrer que si q est non degeneré $F^\perp + G^\perp = (F\cap G)^\perp$ (Utiliser $A^{\perp\perp} = A$)

Exercice n° 4

Soit $q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la forme quadratique définie dans la base canonique $\{e_i\}$ par

$$q(x) = x_1^2 + x_2^2 - \alpha(x_1+x_2)^2,\ \alpha\in\mathbb{R}$$

a/ Determiner $A = M(q)_{e_i}$

b/ Determiner les valeurs propres de A

c/ En déduire une condition sur α pour q soit définie positive.

Exercice n° 5

Bon courage, bonne continuation pour la suite, j'espere que le dernier sujet que je propose coincide (c'est le 23) avec la qualification de l'Algérie. Bonnes vacances.

Université de Tlemcen.
Département de mathématiques

le 21/06/2012 : Bon été.

Epreuve finale de "Algèbre 4".

durée : 2 heures.

Exercice n°1

a/ Soit E un K-espace vectoriel et $s : E\times E \longrightarrow K$ une forme bilinéaire non dégénérée, montrer que $[s(x,z) = s(y,z)\ \forall z\in E] \Rightarrow x = y$.

b/ Soit $(E, <,>)$ un espace euclidien et q une forme quadratique sur E, on note s la forme polaire de q.

1° Montrer qu'il existe un et un seul endomorphisme f_s de E tel que :

$$<x, f_s(y)> = s(x,y)\ \forall x,y\in E.$$

2° Montrer que si v_i et v_j sont 2 vecteurs propres de f_s orthogonaux pour $<,>$ alors ils sont orthogonaux pour s.

Exercice n°2

Soit $q : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$x \longmapsto q(x) = Tr(x^2)$$

a/ Montrer que q est une forme quadratique, déterminer $M(q)_e$, $rg(q)$, $sgn(q)$ et $N(q)$. ($\{e\}$ étant la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$).

b/ Déterminer une base $\{v_i\}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ orthogonale pour q, ainsi qu'une base orthonormée pour q (si elle existe).

c/ Déterminer $M(q)_{v_i}$ et vérifier que $M(q)_{v_i} = {}^tP\, M(q)_e P$ où $P = P_{e\to v}$.

Exercice n°3

Soit $q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ la forme quadratique définie dans la base canonique par $q(x) = x_1^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3$

1/ Déterminer en utilisant 2 méthodes différentes $sgn(q)$ et trouver $I(q)$.

2/ Soit F le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par $v = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, déterminer $F^{\perp\perp}$.

Exercice n°4

Construire une matrice symétrique, non diagonale $A\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ayant une valeur propre strictement positive et 2 valeurs propres strictement négatives.

Exercice n°5

Soit u un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E de valeurs propres $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$.

Montrer que $\forall x\in E$ $\lambda_1\|x\|^2 \leq <u(x), x> \leq \lambda_n\|x\|^2$.

Bon Courage et Bonnes Vacances

N.B : {Ex1, Ex2, Ex3, Ex4} sur 20 pts ; Ex5 sur 1,5 pt.