RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L' ENSEIGNEMENT SUPÉRIEURE ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ÉCOLE PRÉPARATOIRE EN SCIENCES ET TECHNIQUES

T L M C E N

Département des Mathématiques

ÉPREUVE FINALE DU PREMIER SEMESTRE

Module: ALGÈBRE III	Responsable: M.HOUBAD
Date: 20 - 01 - 2016	Année: 2015 - 2016
Coefficient: 3	Durée: $2h00$

Exercice 1 (06 pts).

Soit la matrice $\mathcal{A}$ définie par

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $\mathcal{A}$ admet qu'une seul valeur propre $\lambda_0 = 2$ de multiplicité trois.
2. Donner la décomposition de Dunford de la matrice $\mathcal{A}$.
3. Résoudre le système
$$\frac{d}{dt}X = \mathcal{A}\,X\ .$$

Exercice 2 (08 pts).

Soit la matrice $\mathcal{A}$ définie par

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que le polynôme caractéristique de la matrice $\mathcal{A}$ vaut
$$P_{\mathcal{A}}(\lambda) = (2-\lambda)^3(4-\lambda).$$
2. Déterminer les vecteurs propres de la matrice $\mathcal{A}$.
3. Donner la réduction de Jordan de la matrice $\mathcal{A}$ et déduire le polynôme minimal de $\mathcal{A}$.
4. Donner l'expression de $\mathcal{A}^{-1}$ en fonction de la matrice $\mathcal{A}$ sans calcule.
5. Donner la forme de la décomposition de Dunford de la matrice $\mathcal{A}$ sans calcule.
6. Calculer le terme générale de la suite vectoriel du terme générale X_n définie par
$$X_{n+1} = \mathcal{A}X_n, \quad X_0 \in \mathbb{R}^4.$$

Exercice 3 (06 pts)**.**

L'objective de cet exercice est de résoudre le système suivant

$$\begin{cases} f^{(2)} - 2\, g^{(1)} + f = 0\,, \\ \qquad g^{(2)} - f^{(1)} = 0\,, \end{cases}$$

on pose

$$\frac{d}{dt}X = \begin{pmatrix} f^{(2)} \\ g^{(2)} \\ f^{(1)} \\ g^{(1)} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} f^{(1)} \\ g^{(1)} \\ f \\ g \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer la matrice $\mathcal{A}$ de tel sorte que
$$\frac{d}{dt}X = \mathcal{A}\, X\,.$$
2. Montrer que le polynôme caractéristique de la matrice $\mathcal{A}$ vaut
$$P_{\mathcal{A}}(\lambda) = \lambda^2\,(\lambda - 1)\,(\lambda + 1)\,.$$
3. Donner la réduction de Jordan de la matrice $\mathcal{A}$ et une matrice de passage correspondante.
4. Déterminer la solution de
$$\frac{d}{dt}X = \mathcal{A}\, X\,.$$
5. Déduire les deux fonction f et g.

BP 165 RP, Bel Horizon, Tlemcen DZ - 13000, Algérie. Tél.+213(0)43 204 135. Fax. +213(0)43 201 824. www.epst-tlemcen.dz
mail to : m.houbad@gmail.com

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L' ENSEIGNEMENT SUPÉRIEURE ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ÉCOLE PRÉPARATOIRE EN SCIENCES ET TECHNIQUES

T L M C E N

Département des Mathématiques

ÉPREUVE FINALE DU PREMIER SEMESTRE

Module: ALGÈBRE III	Responsable: M.HOUBAD
Date: 20 - 01 - 2016	Année: 2015 - 2016
Coefficient: 3	Durée: $2h00$

Exercice 1 (06 pts).

Soit la matrice $\mathcal{A}$ définie par

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

01 pts

1. On montrer que $\mathcal{A}$ admet une seul valeur propre $\lambda_0 = 2$ de multiplicité trois.

$$P_{\mathcal{A}}(\lambda) = \det(\mathcal{A} - \lambda \mathrm{I}) = -(\lambda - 2)^3.$$

02 pts

2. La décomposition de Dunford de la matrice $\mathcal{A}$.

$$\mathcal{A} = \mathcal{D} + \mathcal{N}, \quad \mathcal{D} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{N} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

03 Pts

3. Résolution du système

$$\frac{d}{dt}X \; = \; \mathcal{A}\, X\ .$$

on a

$$X \; = \; e^{\mathcal{A}\,t}\, C \; = \; e^{\,\mathcal{D}\,t + \mathcal{N}\,t}\; C \; = \; e^{\,\mathcal{D}\,t}\, e^{\mathcal{N}\,t}\, C \; = \; \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathcal{N}^k}{k!} t^k \right) C$$

On utilise le fait que $\mathcal{N}$ est nilpotente on a $\mathcal{N}^3 = 0$, ce qui donne

$$X = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \left(\mathrm{I} + \mathcal{N}t + \frac{\mathcal{N}^2}{2} t^2 \right) C, \quad \mathcal{N}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C \in \mathbb{R}^3.$$

Exercice 2 (08 pts).

Soit la matrice $\mathcal{A}$ définie par

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

01 pt

1. Le polynôme caractéristique de la matrice $\mathcal{A}$

$$P_{\mathcal{A}}(\,\lambda\,) \; = \; \det\,(\,\mathcal{A} \; - \; \lambda\,\mathrm{I}\,) \; = \; (\,2 \; - \; \lambda\,)^3\,(\,4 \; - \; \lambda\,)\,.$$

01 pt

2. Détermination des vecteurs propres de la matrice $\mathcal{A}$.

$$\mathbb{E}_2 = \text{Vect}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad \mathbb{E}_4 = \text{Vect}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

02 pts

3. La réduction de Jordan de la matrice $\mathcal{A}$ et le polynôme minimal de $\mathcal{A}$.

$$\mathcal{A}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad m_{\mathcal{A}}(\lambda) = (\lambda - 2)^2 (\lambda - 4).$$

01 pt

4. L'expression de $\mathcal{A}^{-1}$ en fonction de la matrice $\mathcal{A}$. On utilise le fait que le polynôme minimale est annulateur de $\mathcal{A}$ donc

$$\begin{aligned} (\mathcal{A} - 2\,\mathrm{I})^2 (\mathcal{A} - 4\,\mathrm{I}) = 0 &\Longrightarrow \mathcal{A}^3 - 8\,\mathcal{A}^2 + 20\,\mathcal{A} - 16\,\mathrm{I} = 0 \\ &\Longrightarrow \mathcal{A}\left(\mathcal{A}^2 - 8\,\mathcal{A} + 20\,\mathrm{I}\right) = 16\,\mathrm{I} \\ &\Longrightarrow \mathcal{A}\underbrace{\left(\frac{1}{16}\mathcal{A}^2 - \frac{1}{2}\mathcal{A} + \frac{5}{4}\mathrm{I}\right)}_{=\,\mathcal{A}^{-1}} = \mathrm{I}. \end{aligned}$$

5. La forme de la décomposition de Dunford de la matrice $\mathcal{A}$.

01 pt

(a) Détermination de la matrice de passage

$$\begin{aligned} \mathcal{A}v_1 &= 2v_1 \\ \mathcal{A}v_2 &= v_1 + 2v_2 \\ \mathcal{A}v_3 &= 2v_3 \\ \mathcal{A}v_4 &= 4v_4 \end{aligned}$$

si le vecteur v_1 prend comme valeur l'un des deux vecteurs

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

cela conduit à une contradiction lors de la résolution de l'équation deux du système précèdent, pur cela on prend une combinaison linéaires de ces deux vecteurs, par exemple

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

ce qui donne que

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, / \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

et donc

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

`01 pt` (b) La décomposition de Dunford est de la forme

$$\mathcal{A} = \underbrace{P \overbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}}^{=\mathcal{D}'} P^{-1}}_{=\mathcal{D}} + \underbrace{P \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{=\mathcal{N}'} P^{-1}}_{=\mathcal{N}}$$

`01 pt` 6. Calculer du terme générale de la suite vectoriel

$$X_{n+1} \;=\; \mathcal{A}\, X_n \;, \quad X_0 \;\in\; \mathbb{R}^4 \;.$$

donc

$$Y_n \;=\; \mathcal{A}'^n\, Y_0 \;, \quad X_n \;=\; P\; Y_n$$

ainsi

$$\mathcal{A}'^n \;=\; (\,\mathcal{D}' \;+\; \mathcal{N}'\,)^n \;=\; \sum_{k\,=\,0}^{n} C_n^k\; \mathcal{D}'^{n\,-\,k}\; \mathcal{N}'^k \;=\; \sum_{k\,=\,0}^{1} C_n^k\; \mathcal{D}'^{n\,-\,k}\; \mathcal{N}'^k \;=\; \mathcal{D}'^n \;+\; n\; \mathcal{D}'^{n\,-\,1}\; \mathcal{N}' \;.$$

alors

$$X_n \;=\; P\; \left[\, \mathcal{D}'^n \;+\; n\; \mathcal{D}'^{n\,-\,1}\, \mathcal{N}' \,\right]\; Y_0 \;, \quad Y_0 \;\in\; \mathbb{R}^4 \;, \quad P\; Y_0 \;=\; X_0 \;.$$

Exercice 3 (06 pts)**.**

L'objective de cet exercice est de résoudre le système suivant

$$\begin{cases} f^{(2)} \;-\; 2\, g^{(1)} \;+\; f \;=\; 0 \,, \\ \qquad\quad g^{(2)} \;-\; f^{(1)} \;=\; 0 \,, \end{cases}$$

on pose

$$\frac{d}{dt} X \;=\; \begin{pmatrix} f^{(2)} \\ g^{(2)} \\ f^{(1)} \\ g^{(1)} \end{pmatrix}, \quad X \;=\; \begin{pmatrix} f^{(1)} \\ g^{(1)} \\ f \\ g \end{pmatrix} .$$

`01 pt` 1. Déterminer la matrice $\mathcal{A}$.

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -\,1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

`01 pt` 2. Le polynôme caractéristique de la matrice $\mathcal{A}$.

$$P_{\mathcal{A}}(\,\lambda\,) = \det\,(\,\mathcal{A} \;-\; \lambda\,\mathrm{I}\,) \;=\; \lambda^2\;(\,\lambda \;-\; 1\,)\;(\,\lambda \;+\; 1)\;.$$

3. La réduction de Jordan de la matrice $\mathcal{A}$ et une matrice de passage correspondante.

`01 pt` (a) Les vecteurs propres

$$\mathbb{E}_0 \;=\; \mathrm{Vect}\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad \mathbb{E}_{-\,1} \;=\; \mathrm{Vect}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad \mathbb{E}_1 \;=\; \mathrm{Vect}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle .$$

`01 pt` (b) Détermination de la matrice de passage

$$\mathcal{A}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ce qui donne le système

$$\begin{aligned} \mathcal{A}v_1 &= 0 \\ \mathcal{A}v_2 &= v_1 \\ \mathcal{A}v_3 &= v_3 \\ \mathcal{A}v_4 &= -v_4 \end{aligned}$$

alors

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

et donc

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

`01 pt` 4. Déterminer la solution de

$$\frac{d}{dt}X = \mathcal{A}\,X .$$

on résoud

$$\frac{d}{dt}Y = \mathcal{A}'\,Y , \quad X = PY$$

donc

$$\begin{aligned} Y &= e^{\mathcal{A}'t}C = e^{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}t} C = e^{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}t + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}t} C \\ &= e^{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}t} e^{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}t} C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \sum_{k=0}^{1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^k \frac{t^k}{k!}C \end{aligned}$$

finalement

$$X = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \left[\mathrm{I} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} t \right] C, \quad C \in \mathrm{R}^4.$$

`01 pt` 5. Détduire les deux fonction f et g.

$$\begin{aligned} f(t) &= 2c_2 + c_3e^t - c_4e^{-t}, \\ g(t) &= c_2t + c_3e^t + c_4e^{-t}. \end{aligned}$$