Révision d'Algèbre 2015-2016

5 juin 2016

©Mekki HOUBAD
Département de Mathématiques
Université Abou Bekr Belkaid
Tlemnce 13000
Algérie
m.houbad@gmail.com

Site officiel:
?

Table des matières

1 Réduction des endomorphisme . . . 5
- 1.1 Réduction diagonale . . . 5
- 1.2 Reduction triangulaire . . . 7
- 1.3 Application . . . 9
- 1.4 Exercices . . . 11
- 1.5 Polynôme minimale et polynôme annulateur . . . 18
- 1.6 Réduction en blocs triangulaires . . . 20
- 1.7 Réduction de Jordan . . . 21

2 Formes Bilinéaires . . . 25
- 2.1 Cas de dimension quelconque . . . 25
- 2.2 Cas de dimension finie . . . 28
- 2.3 Formes quadratiques . . . 30
- 2.4 Bases orthogonales . . . 33
- 2.5 Recherche des bases orthogonales . . . 34
- 2.6 Classification des formes quadratiques . . . 37
- 2.7 Exercices . . . 38

3 Espaces Euclidiens, Espaces Pré-Hilbertiens . . . 47
- 3.1 Endomorphismes Adjoints . . . 50

1

Réduction des endomorphisme

1.1 Réduction diagonale

Cette premiére partie est consacré pour la réduction diagonle d'une endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel ou d'une matrice carrée, le théorème clés est le suivant

Théorème 1 *Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel $\mathbb{E}$ de dimension finie n, alors f est diagonbalisable si et suelement si*

1. *Le plolynôme caractéristique de f est scindé dans $\mathbb{K}$ dans le sens ou il peut être écrit sous la forme*

$$P_f(\lambda) = \prod_{k=1}^{p} (\lambda_k - \lambda)^{\alpha_k}, \quad \sum_{k=1}^{p} \alpha_k = n, \quad \lambda_i \neq \lambda_j \text{ si } i \neq j .$$

2. *Les sous espaces propres vérifiant l'assertion suivante*

$$\forall\, k = 1 \cdots p : \quad \dim \mathbb{E}_{\lambda_k} = \mathrm{mul}(\lambda_k) = \alpha_k .$$

Un corollaire trés utile dans certaines cas particuliers

Corollaire 1 *Dans le cas ou le polynôme caractéristique d'un endomorphisme f est scindé et admet que des racines simples alors l'endomorphisme en question est diagonalisable.*

Une technique qui permet de comprendre la maniére de détermination de la matrices réduite diagonale et de la matrice de passage correspondante.

Technique 1 (Matrice réduite - Matrice de passage) *Pour déterminer la matrice de passage et la matrice réduite d'une endomorphisme on suit les étapes suivantes.*

1. *On détermine les valeurs propres de l'endomorphisme f qu'on les notes λ_i, les vecteurs propres qu'on les notes v_i et on montre que f est diagonalisable .*
2. *La matrice associée à f dans la base $\{ v_i \}$ est diagonale de la forme*

$$\mathcal{A}' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

3. *La matrice de passage correspondante est exprimèe par*

$$P = \begin{pmatrix} v_1 \,\big|\, v_2 \,\big|\, \cdots \,\big|\, v_n \end{pmatrix}$$

de telle sorte que l'ordre des valeurs propres dans la matrice $\mathcal{A}'$ correspond à l'ordre de leurs vecteurs propres dans la matrice P, dans le sens ou si la valeur propre λ prend la $i^{éme}$ position sur la diagonale de la matrice $\mathcal{A}'$ leur vecteur propre prend la $i^{éme}$ position dans la matrice de passage P.

Un exemple pour mieux comprendre la diagonalisation.

Exemple 1 Soit la matrice $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$\boxed{\text{Etape 1 : Polynôme caractéristique de } \mathcal{B}}$ On utilise la défintion du polyôme caractéristique on a

$$P_{\mathcal{B}}(\lambda) = \det(\mathcal{B} - \lambda \mathrm{I}) = \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix},$$

le calcul de ce déterminant par rapport à la premiére colonne permet d'avoir

$$P_f(\lambda) = (-1-\lambda)[(1+\lambda)^2 - 1] + 2(2+\lambda) = (2+\lambda)^2(1-\lambda),$$

donc les valeurs propres de $\mathcal{B}$ sont

$$\lambda_1 = 1 \text{ de multiplicité une}, \quad \lambda_2 = -2 \text{ de multiplicité deux.}$$

$\boxed{\text{Etape 3 : Détermination des vecteurs propres}}$ Il s'agit de résoudre le système dont v est l'inconnu

$$(\mathcal{B} - \lambda \mathbf{I})\, v = 0.$$

ce qui le même que

$$\begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} v = 0, \qquad v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

1. <u>Pour la première valeur propre $\lambda_1 = 1$.</u> Le système (1.1) ce simplifie en

$$\begin{cases} -2x + y + z = 0, \\ x - 2y + z = 0, \\ x + y - 2z = 0, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = y, \\ y \text{ quelconque}, \\ z = y, \end{cases} \Longrightarrow v = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad y \text{ quelconque},$$

quitte à prendre $y = 1$ on déduit que les vecteurs propres correspondant à la valeur propre $\lambda_1 = 1$ sont tous colinéaire au vecteur v_1 qui vaut

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. <u>Pour la deuxième valeur propre $\lambda_2 = -2$.</u> Le système (1.1) ce simplifie en

$$\begin{cases} x + y + z = 0, \\ x + y + z = 0, \\ x + y + z = 0, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = -y - z, \\ y \text{ quelconque}, \\ z \text{ quelconque}, \end{cases} \Longrightarrow v = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

alors on a deux degrés de liberté en y et z cela donne l'existence de deux vecteurs propres. Ainsi on prend $y = 1$ et $z = 0$ cela donne le premier vecteur propre v_2 à savoir

$$v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

et pour $y = 0$ et $z = 1$ on a le second vecteur propre v_3 à savoir

$$v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ,$$

les autres vecteurs propres qui correspondant à la valeur propre λ_2 sont une combinaison linéaire de v_1 et v_2.

En conclusion on a le tableau repécutulatif suivant

	Valeurs propres	
	$\lambda_1 = 1$	$\lambda_2 = -2$
Vecteurs propres	$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Donc

$$\dim \mathbb{E}_1 = 1 = \text{mul}(1) , \quad \dim \mathbb{E}_{-2} = 2 = \text{mul}(-2) ,$$

alors la matrice $\mathcal{B}$ est diagonalisable, la matrice réduite et la matrice de passage sont

$$\mathcal{B}' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} , \quad P = \begin{pmatrix} v_1 \bigg| v_2 \bigg| v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

1.2 Reduction triangulaire

Dans le cas ou une matrice n'est pas diagonalisable, dans la plupart des cas elle peut être triangularisée.

Théorème 2 (Conditions de la triangularisation) *Une matrice carrée $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (ou un endomorphisme f d'un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel $\mathbb{E}$ de dimension finie) est triangularisable si et seulement si sont polynôme carcatéristique est scindé dans $\mathbb{K}$.*

Une technique pour résumer les étapes de la détermination de la forme réduite triangulaire et de la matrice de passage correspondante.

Technique 2

Soit $\mathcal{A}$ une matrice carrée, pour déterminer la matrice réduite triangulaire et la matrice de passge coorespondante en suite les quatres étapes suivante.

1. *On détermine le polynôme carcatéristique, les valeurs propres et les sous espaces propres associées ainsi que leurs dimensions. Si la dimension d'un seul sous espace propre est différente de la multiplicité de la valeur propre correpondante alors la matrice n'est pas diagonalisable mais triangularisable.*
2. *Dans ce cas, cette matrice dans une base $\{ v_1 , v_2 , \cdots , v_n \}$ s'écrit sous la forme*

$$\mathcal{A}' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a & \cdots & b \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & c \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} . \tag{1.2}$$

3. *On résoud le système suivant*

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\, v_1 &= \lambda_1\, v_1\ , \\ \mathcal{A}\, v_2 &= a\, v_1\ +\ \lambda_2\, v_2\ , \\ &\vdots \\ \mathcal{A}\, v_n &= b\, v_1\ +\ c\, v_2\ +\ \cdots\ +\ \lambda_n\, v_n\ . \end{aligned}$$

dont les inconnus sont v_1, v_2,... v_n *et les paramétres a, b, c etc, avec la contrainte*

$$\det\left(v_1 \middle| v_2 \middle| \cdots \middle| v_n\right) \neq 0\ .$$

4. *Une fois on détermine les coefficients a, b, c, etc et les vecteurs* v_1, v_2,... v_n, *la matrice réduite triangulaire est donnée par (1.2) et la matrice de passage vaut*

$$P\ =\ \left(v_1 \middle| v_2 \middle| \cdots \middle| v_n\right)\ .$$

Un exemple pour mieux comprendre la traingularisation.

Exemple 2 Soit la matrice

$$\mathcal{C}\ =\ \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}\ ,$$

$\boxed{\text{Étape 1 :Détermination du polynôme caractéristique}}$ Le calcul fournit

$$P_{\mathcal{C}}(\,\lambda\,)\ =\ \det\left(\,\mathcal{C}\ -\ \lambda\,\mathrm{I}\,\right)\ =\ (\,1\ -\ \lambda\,)^3\ .$$

On a une seule valeur propre qui vaut 1 de multiplicité trois.

$\boxed{\text{Étape 2 :Détermination des vecteurs propres}}$ Il s'agit de résoudre le système

$$(\,\mathcal{C}\ -\ \lambda\,\mathrm{I}\,)\,v\ =\ 0\ ,$$

ce qui donne que

$$v\ =\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\ ,$$

Donc

$$\dim \mathbb{E}_2 = 1 \neq \mathrm{mul}\ (\,1\,) = 3$$

alors la matrice n'est pas diagonalisable mais triangularisable.

$\boxed{\text{Étape 3 :Déterminationde la forme réduite}}$ La matrice en question elle est sommblable à une matrice traingulaire supérieure définie dans la base $\{\,v_1, v_2, v_3\,\}$ par

$$\mathcal{C}'\ =\ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\ ,$$

ce qui permet de tirer le système suivant

$$\mathcal{C}v_1 = v_1 \,, \tag{1.3}$$
$$\mathcal{C}v_2 = v_2 + a\, v_1 \,, \tag{1.4}$$
$$\mathcal{C}v_3 = v_3 + c\, v_2 + b\, v_1 \,. \tag{1.5}$$

L'équation (1.3) affirme que v_1 c'est le vecteur propre correspond à la valeur propre $\lambda = 1$ d'où

$$v_1 = v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

L'équation (1.4), vu que la valeur propre 1 n'admet qu' un seul vecteur propre donc on ne peut pas prendre $a = 0$, la détermination du vecteur v_2 se fait par

$$v_2 = \begin{pmatrix} y - a \\ y \\ y \end{pmatrix} ,$$

soit $a = 1$ et $y = 0$ donc

$$v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

L'équation (1.5) permt de déterminer le vecteur v_3 comme étant

$$v_3 = \begin{pmatrix} y + 3\,c - b \\ y \\ y + c \end{pmatrix} ,$$

pour que la famille $\{\, v_1, v_2, v_3 \,\}$ forme une base il faut et il suffit que

$$\det \;||\; v_1, v_2, v_3 \;|| \neq 0 \,,$$

le calcule fournit

$$c \neq 0 \,,$$

alors pour

$$c = 1 \,,\;\; b = 0 \,,\;\; x = 0 \,,$$

on aura

$$v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

En conclusion la matrice réduite et la matrice de passage sont

$$\mathcal{C}' = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad P = \left(v_1 \middle| v_2 \middle| v_3 \right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

1.3 Application

Trois applications fondmentales de la diagonalisation

1.3.1 Calcul de la puissance d'une matrice

On s'intéresse à calucler la puissance d'une matrice carrée $\mathcal{A}$ toute en supposant qu' elle est diagonalisable, cela étant dit permet de conclure l'exitence d'une matrice $\mathcal{A}'$ diagonale formée par les valeurs propres de $\mathcal{A}$ de la fomre

$$\mathcal{A}' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} ,$$

et une matrice inverssible P formée par les vecteurs propres de $\mathcal{A}$ tel que la construction de $\mathcal{A}'$ et P se fait selon la Technique 1 page 5, et ses ingrédiants sont reliées par la relation

$$\mathcal{A}' = P^{-1} \mathcal{A} P \implies \mathcal{A} = P \mathcal{A}' P^{-1} .$$

L'utilisation du fait que $P \ P^{-1} = \mathrm{I}$, permet d'avoir

$$\mathcal{A}^k = P \mathcal{A}'^k P^{-1} ,$$

ainsi il est simple de montrer que

$$\mathcal{A}'^k = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{pmatrix} , \tag{1.6}$$

d'où

$$\mathcal{A}^k = P \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{pmatrix} P^{-1} ,$$

1.3.2 Système de suites récurrentes

On suppose qu'on a un système des suites récurrentes dans lequel on cherche à déterminer le terme général en fonction des premiers termes de chaque suite et de l'indice k, à savoir

$$\begin{cases} u_{k+1} = a_{11} u_k + a_{12} v_k + \cdots + a_{1n} z_k , \\ v_{k+1} = a_{21} u_k + a_{22} v_k + \cdots + a_{2n} z_k , \\ \qquad \vdots \\ z_{k+1} = a_{n1} u_k + a_{n2} v_k + \cdots + a_{nn} z_k , \end{cases} \tag{1.7}$$

le système (1.7) peut être met sous la forme matricielle suivante

$$X_{k+1} = \mathcal{A} X_k \tag{1.8}$$

tel que

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} , \quad X_k = \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \\ \vdots \\ z_k \end{pmatrix} .$$

Ainsi

$$X_{k+1} = \mathcal{A}^k X_1 , \tag{1.9}$$

Dans le cas où la matrice $\mathcal{A}$ est diagonalisable cela revient à calculer la puissance d'une matrice qui se fait selon la partie précédente qui affirme que

$$\mathcal{A}^k = P \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{pmatrix} P^{-1} , \tag{1.10}$$

quitte a remplacer la valeur de (1.10) dans (1.9) on obtient le terme général en fonction de l'indice k et du premier terme X_1 uniquement.

1.3.3 Système d'équations différentielles

Soit le système d'équations différentielles linéaires à coefficients constants sans second membre autonôme suivant

$$\begin{cases} \dfrac{d}{d\,t}\, x_1 = a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \cdots + a_{1n}\, x_n , \\ \dfrac{d}{d\,t}\, x_2 = a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + \cdots + a_{2n}\, x_n , \\ \qquad \vdots \\ \dfrac{d}{d\,t}\, x_n = a_{n1}\, x_1 + a_{n2}\, x_2 + \cdots + a_{nn}\, x_n , \end{cases} \tag{1.11}$$

ce système peut être met sous une forme matrcielle

$$\frac{d}{d\,t} X = \mathcal{A}\, X , \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} , \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} . \tag{1.12}$$

La résolution de ce système se fait selon la technique suivante

Technique 3

1. *On diagonalise $\mathcal{A}$ et on détermine la matrice réduite $\mathcal{A}'$ et la matrice de passgae correspondante P selon la Technique 1 page 5.*
2. *On résoud le système*
$$\frac{d}{d\,t} Y = \mathcal{A}'\, Y .$$
3. *La solution du système (1.12) est*
$$X = P\, Y .$$

Remarque 1.1. La traingularisation permet de résoudre des système différentielles, et cette résolution elle se fait selon les étapes de la Technique 3.

1.4 Exercices

Exercice 1 Résoudre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ l'équation suivante dont $\mathcal{A}$ est l'inconnu

$$\mathcal{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 9 \end{pmatrix} .$$

Solution de l'exercice 1 La matrice
$$\mathcal{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 9 \end{pmatrix} ,$$
admet trois valeurs propres distinctes
$$\lambda_1 = 1 , \quad \lambda_2 = 4 , \quad \lambda_3 = 9 ,$$
donc elle est diagonalisable et elle peut être écrite sous la forme
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 9 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} P^{-1} ,$$
avec P la matrice de passage corespondante qui vaut
$$P = \begin{pmatrix} -24 & 0 & 0 \\ 8 & 5 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} .$$
Ainsi on peut toujours trouver une matrice $\mathcal{C}$ tel que la matrice $\mathcal{A}$ vaut
$$\mathcal{A} = P\,\mathcal{C}\,P^{-1} ,$$
ce qui donne
$$\mathcal{A}^2 = P\,\mathcal{C}^2\,P^{-1} .$$
Le probléme revient à chercher les matrices $\mathcal{C}$ qui sont solution de
$$P\,\mathcal{C}^2\,P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} P^{-1} \Longrightarrow \mathcal{C}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} ,$$
huit cas possibles pour la matrice $\mathcal{C}$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} .$$
Ainsi quitte à choisir une matrice $\mathcal{C}$ dans la liste précédnete et calculer
$$\mathcal{A} = P\,\mathcal{C}\,P^{-1} ,$$
on rattrape toute les solutions possibles du problème posé.

Exercice 2 Soient $\{\mathbf{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{\mathbf{V}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et $\{\mathbf{Z}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites numériques réelles vérifiant
$$\begin{cases} \mathbf{U}_n = 8\,\mathbf{U}_{n-1} + 9\,\mathbf{Z}_{n-1} , \\ \mathbf{V}_n = -3\,\mathbf{U}_{n-1} - \mathbf{V}_{n-1} - 3\,\mathbf{Z}_{n-1} , \\ \mathbf{Z}_n = -6\,\mathbf{U}_{n-1} - 7\,\mathbf{Z}_{n-1} . \end{cases}$$
Déterminer les termes $\mathbf{U}_n$, $\mathbf{V}_n$ et $\mathbf{Z}_n$ en fonction de n, $\mathbf{U}_0$, $\mathbf{V}_0$ et $\mathbf{Z}_0$.

Solution de l'exercice 2 Le système peut être écrit sous la forme matriciel suivante

$$\begin{pmatrix} \mathbf{U}_n \\ \mathbf{V}_n \\ \mathbf{Z}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 \\ -3 & -1 & -3 \\ -6 & 0 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_{n-1} \\ \mathbf{V}_{n-1} \\ \mathbf{Z}_{n-1} \end{pmatrix},$$

la matrice de ce système elle a pour polynôme caractéristique

$$-(1+\lambda)^2(-2+\lambda),$$

donc elle admet deux valeurs propres la première $\lambda_1 = -1$ de multiplicité deux et la seconde $\lambda_2 = 2$ de multiplicté une. On passe à la détermination des vecteurs propres, il s'agit de résoudre le système dont v est l'inconnu

$$\begin{pmatrix} 8-\lambda & 0 & 9 \\ -3 & -1-\lambda & -3 \\ -6 & 0 & -7-\lambda \end{pmatrix} v = 0.$$

— Pour la première valeur propre $\lambda_1 = -1$ on trouve deux vecteurs propres

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

— Pour la deuxième valeur propre $\lambda_2 = 2$ on trouve un seul vecteur propre

$$\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

ainsi la matrice réduite et la matrice de passage sont

$$\mathcal{A}' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ce qui donne que

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 \\ -3 & -1 & -3 \\ -6 & 0 & -7 \end{pmatrix}^n = P\,\mathcal{A}'^{\,n}\,P^{-1},$$

ainsi la valeur de $\mathcal{A}^n$ vaut

$$\begin{pmatrix} 2\times(-1)^{n+1} - 3\times 2^n & 0 & 6\times(-1)^{n+1} - 3\times 2^{n+1} \\ (-1)^n - 2^n & (-1)^n & 3\times(-1)^n + (-1)^{n+1} - 2^{n+1} \\ (-1)^n - 2^n & 0 & 3\times(-1)^n - 2^{n+1} \end{pmatrix},$$

ce qui permet d'identifier les termes généraux des suites mises en jeux

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}_n &= [\,2\times(-1)^{n+1} - 3\times 2^n\,]\,\mathbf{U}_0 + [\,6\times(-1)^{n+1} - 3\times 2^{n+1}\,]\,\mathbf{Z}_0\,, \\
\mathbf{V}_n &= [\,(-1)^n - 2^n\,]\,\mathbf{U}_0 + (-1)^n\,\mathbf{V}_0 + [\,3\times(-1)^n + (-1)^{n+1} - 2^{n+1}\,]\,\mathbf{Z}_0\,, \\
\mathbf{Z}_n &= [\,(-1)^n - 2^n\,]\,\mathbf{U}_0 + [\,3\times(-1)^n - 2^{n+1}\,]\mathbf{Z}_0\,.
\end{aligned}$$

Exercice 3 Soient $\mathbb{R}_2[X]$ vu comme un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel et f un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$. Calculer $f^n(\mathcal{P})$ sachant que

$$\forall\, \mathcal{P} \in \mathbb{R}_2[X] : f(\mathcal{P}) = (2X+1)\,\mathcal{P} - (X^2-1)\,\mathcal{P}^{(1)}.$$

Solution de l'exercice 3 (Enoncé page 13) La matrice associé à f dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ vaut

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

avec un polynôme caractéristique

$$P_{\mathbb{M}}(\lambda) = (1 - \lambda)(1 + \lambda)(\lambda - 3) \Longrightarrow \mathrm{Sp}(\mathbb{M}) = \{-1, 1, 3\}.$$

La multiplicité de chaque valeur propre vaut 1 donc $\mathbb{M}$ est diagonalisable avec une matrice réduite $\mathbb{M}'$ et une matrice de passage correspondante P

$$\mathbb{M}' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

ce qui donne

$$f^n(a_0 + a_1 X + a_2 X^2) = [P\ \mathbb{M}\ P^{-1}]^n \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = P\ \mathbb{M}^n\ P^{-1} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix},$$

le calcul fournit

$$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} (-1)^n + 2 + 3^n & 3^n & (-1)^n - 2 + 3^n \\ 2(-1)^{n+1} + 2 \times 3^n & 2 \times 3^n & 2 \times (-1)^{n+1} + 2 \times 3^n \\ (-1)^n - 2 + 3^n & 3^n & (-1)^n + 2 + 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix},$$

finalement

$$\begin{aligned}
&f(a_0 + a_1 X + a_2 X^2) = \\
&\frac{1}{4}\Big[\big[(-1)^n + 2 + 3^n \big] a_0 + 3^n a_1 + \big[(-1)^n - 2 + 3^n \big] a_2 \Big] \\
&+ \frac{1}{4}\Big[\big[2(-1)^{n+1} + 2 \times 3^n \big] a_0 + 2 \times 3^n a_1 + \big[2 \times (-1)^{n+1} + 2 \times 3^n \big] a_2 \Big] X \\
&+ \frac{1}{4}\Big[\big[(-1)^n - 2 + 3^n \big] a_0 + 3^n a_1 + \big[(-1)^n + 2 + 3^n \big] a_2 \Big] X^2 .
\end{aligned}$$

Exercice 4 (Solution page 14) Résoudre les deux systèmes différentiel d'ordre un à coefficients constants

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + 2y - 2z, \\[2mm] \dfrac{dy}{dt} = -x + z, \\[2mm] \dfrac{dz}{dt} = x + y. \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + y + 2z, \\[2mm] \dfrac{dy}{dt} = x + y, \\[2mm] \dfrac{dz}{dt} = -x + y + 2z. \end{cases}$$

Solution de l'exercice 4

1. Pour le premier système le polynôme caractéristique vaut

$$(1 - \lambda)^3,$$

la matrice est traingularisable et non diagonalisable, la matrice réduite triangulaire et la matrice de passage correpodante sont

$$\mathcal{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

la résolution du systéme

$$\frac{d}{d\,t} Y = \mathcal{A}' Y ,$$

permet d'avoir

$$Y = \begin{pmatrix} -k_3\,t + k_1 \\ k_3\,t + k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} e^t ,$$

ainsi la solution de système intial est donnée par $X = PY$ d'où

$$X = \begin{pmatrix} -2\,k_3\,t + k_1 - k_2 + k_3 \\ k_3\,t + k_2 \\ -k_3\,t + k_1 \end{pmatrix} e^t .$$

2. Pour le second système le polynôme caractéristique vaut

$$(2 - \lambda)^3 ,$$

la matrice de ce système n'est pas diagonalisable mais triangularisable, la matrice réduite triangulaire et la matrice de passage correspondante sont

$$\mathcal{A}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} , \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} ,$$

ainsi la résolution du systéme

$$\frac{d}{d\,t} Y = P\,Y ,$$

vaut

$$Y = \begin{pmatrix} k_3\,t^2 + k_2\,t + k_1 \\ 2\,k_3\,t + k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} e^{2\,t} ,$$

finalement la solution du système initial est donnée par $X = PY$ donc

$$X = \begin{pmatrix} k_3\,t^2 + k_2\,t + k_1 \\ k_3\,t^2 + (k_2 - 2\,k_3)\,t + k_1 - k_2 + 2\,k_3 \\ -k_3\,t^2 - (k_2 - 2\,k_3)\,t - k_1 + k_2 - k_3 \end{pmatrix} e^{2\,t} .$$

Exercice 5 (Solution page 16) Soit $\mathbb{E} = C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$ le $\mathbb{R}$ - espace vectoriel des fonctions infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{C}$, on défini l'endomorphisme

$$\Phi : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E},\ f \longmapsto \Phi(f) ,$$

tel que

$$\forall\, x \in \mathbb{R} : \ \Phi\big(f\big)(x) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \psi(t,x)\,f(t)\,dt .$$

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de Φ dans le cas où

$$\psi(t,x) = sin(x - t)\,e^{x-t} .$$

2. Quelle sont les conditions nécessaires et suffisantes sur la fonction g de telle sorte que l'équation

$$\Phi(f) \equiv g ,$$

admet des solutions dans $\mathbb{E}$

3. Mêmes questions dans le cas où

$$\psi(t, x) = cos(x + t) e^{x - t} .$$

Solution de l'exercice 5 Dans le cas ou $\psi(t , x) = \sin(x - t)$ on a

1. Les valeurs et les vecteurs propres de Φ. On utilise la formule

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos\alpha \sin\beta + \cos\beta \sin\alpha ,$$

pour simplifier l'écriture de Φ en

$$\Phi\big(f \big)(x) = A e^x \cos x + B e^x \sin x ,$$

tel que

$$A = - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sin t e^{-t} f(t) dt , \quad B = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos t e^{-t} f(t) dt .$$

Ainsi la recherche des valeurs et des vecterus propres revient à résoudre

$$\Phi\big(f \big)(x) = \lambda f(x) = A e^x \cos x + B e^x \sin x ,$$

a. Si $\lambda = 0$. En utilisant le fait que les deux vecteurs

$$\cos x e^x , \quad \sin x e^x ,$$

sont linéairement indépendants, on conclu que

$$A = 0 , \quad B = 0 .$$

Ainsi les vecteurs propres correspondant à la valeur propre 0 forment le sous espace propres

$$\mathbb{E}_0 = \left\{ f \in \mathbb{E} : \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sin t e^{-t} f(t) dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos t e^{-t} f(t) dt = 0 \right\} .$$

b. Si $\lambda \neq 0$. Dans ce cas on a

$$f(x) = \frac{A}{\lambda} e^x \cos x + \frac{B}{\lambda} e^x \sin x ,$$

ce qui permet de calculer A et B et conclure que

$$A = - \frac{\pi}{2 \lambda} B , \quad B = \frac{\pi}{2 \lambda} A ,$$

d'où

$$A (\pi^2 + 4 \lambda) = 0 , \quad B = \frac{\pi}{2 \lambda} A ,$$

il est impossible d'avoir $A = 0$ sinon on aura $f \equiv 0$ ce qui est absurde vu la définition des vecteurs propres. Ainsi deux valeurs propres sont possibles et

$$\mathbb{E}_{i \frac{\pi}{2}} = \text{Vect} \left\langle e^{(1 - i) x} \right\rangle , \quad \mathbb{E}_{- i \frac{\pi}{2}} = \text{Vect} \left\langle e^{(1 + i) x} \right\rangle ,$$

2. Condition nécéssaire et suffisante. Il faut et il suffit que

$$g \in \mathbb{E}_{i\,\frac{\pi}{2}} \oplus \mathbb{E}_{-i\,\frac{\pi}{2}} .$$

Dans la cas ou $\psi(t\,,\,x) = \cos(x + t)$ on a

1. Les valeurs et les vecteurs propres de Φ. On utilise la formule

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\,\cos\beta - \sin\beta\sin\alpha\,,$$

pour simplifier l'écriture de Φ en

$$\Phi\big(f\big)(x) = A\,e^{x}\,\cos x + B\,e^{x}\,\sin x\,,$$

tel que

$$A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos t\; e^{-t}\,f(t)\,dt\,,\quad B = -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sin t\; e^{-t}\,f(t)\,dt\,.$$

Ainsi la recherche des valeurs et des vecteurs propres revient à résoudre

$$\Phi\big(f\big)(x) = \lambda\,f(x) = A\,e^{x}\,\cos x + B\,e^{x}\,\sin x\,,$$

a. Si $\lambda = 0$. En utilisant le fait que les deux vecteurs

$$\cos x\; e^{x}\,,\quad \sin x\; e^{x}\,,$$

sont linéairement indépendants, on conclu que $A = 0$ et $B = 0$. Ainsi les vecteurs propres correspondant à la valeur propre 0 forment le sous espace propre

$$\mathbb{E}_0 = \left\{ f \in \mathbb{E} : \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sin t\; e^{-t}\,f(t)\,dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos t\; e^{-t}\,f(t)\,dt = 0 \right\}.$$

b. Si $\lambda \neq 0$. Dans ce cas on a

$$f(x) = \frac{A}{\lambda}\,e^{x}\,\cos x + \frac{B}{\lambda}\,e^{x}\sin x\,,$$

ce qui permet de calculer A et B et conclure que

$$A = \frac{\pi}{2\,\lambda}\,A\,,\quad B = \frac{\pi}{2\,\lambda}\,B\,,$$

d'où

$$\lambda = \frac{\pi}{2}\,,\quad A,\ B \ \text{ quelconque non tous les deux nuls}\,,$$

ce qui donne

$$\mathbb{E}_{\frac{\pi}{2}} = \text{Vect}\,\big\langle \sin t\; e^{t}\,,\ \cos t\; e^{t} \big\rangle\,.$$

2. Condition nécéssaire et suffisante. Il faut et il suffit que

$$g \in \mathbb{E}_{\frac{\pi}{2}}\,.$$

1.5 Polynôme minimale et polynôme annulateur

Une notion qui permet de déterminer le caractére de diagonalisation et du triangularisation.

Définition 1 *Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel, $\mathbb{K}[\ X\ ]$ l'ensemble des polynômes de degré quelconque à coefficients dans $\mathbb{K}$ et $\mathcal{Q} \in \mathbb{K}[\ X\ ]$ exprimé par*

$$\mathcal{Q}(\ X\ ) \ = \ \sum_{k\ =\ 0}^{m} a_k\ X^k\ .$$

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{E}$, on note

$$\mathcal{Q}(\ f\ ) \ = \ \sum_{k\ =\ 1}^{m} a_k\ f^k\ , \quad f^k \ = \ \underbrace{f\ \circ \cdots \circ\ f}_{n\ foix}\ .$$

Dans le cas d'une matrice carrée $\mathcal{A}$ on note

$$\mathcal{Q}(\ \mathcal{A}\ ) \ = \ \sum_{k\ =\ 1}^{m} a_k\ \mathcal{A}^k\ .$$

Maintenant une fois la défintion de la composée d'un polynôme par un endomorphisme établit on peut donner la défintion du polynôme annulateur d'un endomorphisme.

Définition 2 (Polynôme annulateur) *Soit f un endomorphsime d'une $\mathbb{K}$ - espace vectoriel $\mathbb{E}$ et soit $\mathcal{Q}$ un polynôme de $\mathbb{K}[\ X\ ]$, on dit qu'il est annulateur de f si*

$$\mathcal{Q}(\ f\ ) \ \equiv \ 0\ .$$

Théorème 3 *Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel $\mathbb{E}$ de dimension finie. Alors f est diagonalisable si et seulement si il exsite un polynôme scindé qui admet que des racines simples et qui annule f.*

Définition 3 (Polynôme minimal) *Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ espace vectroiel $\mathbb{E}$, on appelle un polynôme minimal de f et on le note m_f le polynôme annulateur de f qui est*

1. *Normalisé dans le sens ou le coefficient du monôme du plus haut degré de ce polynôme vaut un.*
2. *C'est le polynôme de degré le plus petit parmi tous les polynômes annulateurs de f.*

Proposition 1 *Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel $\mathbb{E}$ et $\mathcal{Q}$ un polynôme sur $\mathbb{K}$. Alors $\mathcal{Q}$ est annulateur de f si et seulement si est un multiple du polynôme minimal de f.*

Théorème 4 (Cayley Hamilton) *Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel $\mathbb{E}$ de dimension finie n. Alors le polynôme caractéristique P_f de l'endomorphisme f est un polynôme annulateur de f, autrement*

$$P_f(\ f\ ) \ \equiv \ 0\ .$$

Corollaire 2 *Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel $\mathbb{E}$ de dimension finie. Alors Le polynôme caractéristique de f est un multiple de son polynôme minimal.*

Technique 4 *Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel de dimension finie n, et soit f un endomorphisme de $\mathbb{E}$. On suppose qu'on a déterminer le polynôme caractéristique de f et qui vaut*

$$P_f(\ \lambda\ ) \ = \ \prod_{k\ =\ 1}^{p} (\ \lambda\ -\ \lambda_k\ )^{\alpha_k}\ , \quad \sum_{k\ =\ 1}^{p} \alpha_k \ = \ n\ ,$$

alors on fabirque la liste des polynôme suivante

$$\mathcal{Q}_J(\lambda) = \prod_{k=1}^{p} (\lambda - \lambda_k)^{\beta_k}, \quad \sum_{k=1}^{p} \beta_k = J, \quad J = p \cdots n.$$

dans cette liste pour $J = p \cdots n$ fixé, le polynôme $\mathcal{Q}_J$ n'est pas unique, mais il se peut qu' il a plusieures possibilité. Alors pour $J = p \cdots n$ on cacule la valeur de

$$\mathcal{Q}_J(\mathcal{A}) = \prod_{k=1}^{p} (\mathcal{A} - \lambda_k I)^{\beta_k},$$

le premier indice J_0 qui annule cette valeur donne le polynôme minimal de f, autrement

$$m_f(\lambda) = \mathcal{Q}_{J_0}.$$

Théorème 5 (Théorème Principal) *Soient $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel de dimension finie n et f un endomorphisme de $\mathbb{E}$. Alors f est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé dans $\mathbb{K}$ et n'admet que des racines simples.*

Exemple 3

Supposons qu'on a un endomorphsime qu'on a calculé son polynôme caractéristique et on a trouvé qu'il vaut

$$-(\lambda - 1)^3 (\lambda - 2)^2 (\lambda + 1)^2,$$

ainsi les possibilités pour le polynôme minimal sont

1. Pout $J = 3$ ona
$$\mathcal{Q}_3 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda + 1).$$
2. Pour $J = 4$ on a
$$\mathcal{Q}_4 = \begin{cases} (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda + 1)^2, \\ \text{ou} \\ (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2(\lambda + 1), \\ \text{ou} \\ (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)(\lambda + 1). \end{cases}$$
3. Pour $J = 5$ on a
$$\mathcal{Q}_5 = \begin{cases} (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2(\lambda + 1)^2, \\ \text{ou} \\ (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)(\lambda + 1)^2, \\ \text{ou} \\ (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)^2(\lambda + 1), \\ \text{ou} \\ (\lambda - 1)^3(\lambda - 2)(\lambda + 1). \end{cases}$$
4. Pour $J = 6$ on a
$$\mathcal{Q}_6(\lambda) = \begin{cases} (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)^2(\lambda + 1)^2, \\ \text{ou} \\ (\lambda - 1)^3(\lambda - 2)(\lambda + 1)^2, \\ \text{ou} \\ (\lambda - 1)^3(\lambda - 2)^2(\lambda + 1). \end{cases}$$
5. Pour $J = 7$ on a
$$\mathcal{Q}_7(\lambda) = (\lambda - 1)^3(\lambda - 2)^2(\lambda + 1)^2.$$

Le polynôme minimal existe dans cette liste, pour le déterminer on commence par tester ces polynômes un par un sur la matrice associée à l'endomorphsime dans le sens ou on calcule $\mathcal{Q}_J(\ \mathcal{A}\ )$ avec $\mathcal{A}$ la matrice associée à l'endomorphisme dans n'importe quelle base. En commencant par $J = 3$ s'il s'annule c'est le polynôme minimal sinon en passe a la liste de $J = 4$ si l'un d'eux s'annule c'est notre m_f sinon en passe a $J = 5$ et ainsi de suite. Si tout les polynômes pour $J \leq 6$ ne s'annulent pas losrque en calcule $\mathcal{Q}_J(\ \mathcal{A}\ )$, alors pour $J = 7$, $\mathcal{Q}_7$ c'est le polynôme caractéristique à signe près, là il ne faut pas calculer plutôt en utilise le Théoréme 4 page 18 pour conclure que c'est le polynôme minimal.

1.6 Réduction en blocs triangulaires

La partie deux de ce document donne une méthode de caractérisation des matrices et donc des endomorphismes triangularisables, autrement elle peut êtremise sous la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & Termes & \\ 0 & \lambda_2 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

L'objectif de cette est de simplifier encore plus la forme triangulaire, autrement il s'agit de remplir les valeurs qui figurent au niveau de la matrice précédente et qui sont notée "*Termes*" par le plus des zéros possible.

Définition 4 (Sous espaces caractéristiques) *Soint $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel, f un endmorphisme de $\mathbb{E}$ et λ une valeur propre de f de multiplicité α. Alors on appelle le sous espace caractéristique associé à la valeur propre λ le sous espace vectoriel*

$$N_\lambda = \operatorname{Ker}(\ f - \lambda \operatorname{Id}\ )^\alpha\ ,$$

Exemple 4 Soit la matrice de $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_4(\ \mathbb{R}\ )$ qui représente la matrice associée à un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dans sa base canonique

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

le polynôme caractéristique de cette matrice vaut

$$P_f(\ x\ ) = X^2\ (\ X - 1\ )^2\ ,$$

donc il existe une base de $\mathbb{R}^4$ qu'on note $\{\ v_1\ ,\ v_2\ ,\ v_3\ ,\ v_4\ \}$ tel que dans cette base la matrice précédente c'écrit ous la forme

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{matrix}} \end{pmatrix}, \\ \begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathcal{A}v_1 & \mathcal{A}v_2 & \mathcal{A}v_3 & \mathcal{A}v_4 \end{matrix} \end{array}$$

ce qui permet d'avoir le systéme suivant

$$\mathcal{A}v_1 = v_1\ , \tag{1.13}$$

$$\mathcal{A}v_2 = a\ v_1 + v_2\ , \tag{1.14}$$

$$\mathcal{A}v_3 = 0\ , \tag{1.15}$$

$$\mathcal{A}v_4 = b\ v_3\ , \tag{1.16}$$

1. L'équarion (1.13) affirme que v_1 est un vecteur propre correspondant à la valeur propre 1 ce qui donne
$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
2. Vu que la valeur propre 1 a un sous espace propre correspondant de dimension une, donc dans l'équation (1.14) on ne peut pas prendre $a = 0$ sinon v_2 sera un vecteur propre de la valeur propre 1 donc colinéaire à v_1, donc on choisit $a = 1$ ce qui donne
$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
3. L'équation (1.15) affirme que v_3 est un vecteur propre de la valeur 0 ainsi le calcul fournit
$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
4. Vu que la valeur propre 0 admet un sous espace propre de dimension une, donc on ne peut pas prendre $b = 0$ dans l'équation (1.16), alors soit $b = 1$ ce qui donne
$$v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Alors la forme réduite en blocs triangulaire et la matrice de passage correspondante sont
$$\mathcal{A}' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & b \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, = \begin{pmatrix} 1\,1\,0\,0 \\ 0\,1\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,1 \\ 0\,0\,0\,0 \end{pmatrix}, \quad P = \left(v_1 \middle| v_2 \middle| v_3 \middle| v_4 \right) = \begin{pmatrix} 0\,1\,1\,0 \\ 0\,0\,1\,1 \\ 1\,0\,0\,1 \\ 1\,0\,0\,0 \end{pmatrix}.$$

1.7 Réduction de Jordan

Définition 5 (Bloc de Jordan) *On appelle un bloc de Jordan d'ordre n une matrice carrée de taille n de la forme*

1. *Si $n \geq 2$ alors*
$$\mathcal{J}_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix},$$
2. *si $n = 1$ alors*
$$\mathcal{J}_1(\lambda) = (\lambda).$$

Théorème 6 (Premier Théorème de Jordan) *Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel $\mathbb{E}$ de dimension finie n tel que*

1. *Le polynôme caractéristique de f est scindé et f admet une seule valeur propre λ*
$$P_f(X) = (-1)^n (X - \lambda)^n .$$
2. *Le polynôme minimal de f est de la forme*
$$mf(X) = (X - \lambda)^{\beta} .$$
3. *Le sous espace propre correspondant à la valeur propre λ admet une dimension vaut γ*
$$\dim \mathbb{E}_{\lambda} = \gamma .$$

Alors dans ce cas, il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{E}$ dans laquelle la matrice associée à f est de la forme

$$\tilde{\mathcal{J}} := \begin{pmatrix} \boxed{\mathcal{J}_1(\lambda)} & & & \mathbf{0} \\ & \boxed{\mathcal{J}_2(\lambda)} & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \boxed{\mathcal{J}_p(\lambda)} \end{pmatrix},$$

où
- *Les $\mathcal{J}_k(\lambda)$ sont les blocs de Jordan.*
- *L'ordre du plus grand bloc est β.*
- *Le nombre des blocs est γ.*

Théorème 7 (Second Théorème de Jordan) *Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel $\mathbb{E}$ de dimension finie n tel que le plynôme caractéristique de f est scindé et f admet p valeurs propres distinctes λ_k pour $k = 1 \cdots p$ chacune de multiplicité α_k*
$$P_f(X) = (-1)^n \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)^{\alpha_k} .$$
Alors il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{E}$ telle que la matrice associée à f dans cette base est de la forme

$$\begin{pmatrix} \boxed{\tilde{\mathcal{J}}_1(\lambda_1)} & & & \mathbf{0} \\ & \boxed{\tilde{\mathcal{J}}_2(\lambda_2)} & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \boxed{\tilde{\mathcal{J}}_p(\lambda_p)} \end{pmatrix},$$
$$\underbrace{\qquad\qquad}_{\text{de taille } \alpha_1} \quad \underbrace{\qquad\qquad}_{\text{de taille } \alpha_2} \quad \cdots \quad \underbrace{\qquad\qquad}_{\text{de taille } \alpha_p}$$

tel que les blocs $\tilde{\mathcal{J}}$ sont donner par le théorème 6.

Exemple 5 Soit l'endomorphisme f d'un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel $\mathbb{E}$ de dimension 5 dont le polynôme caractéristique et le polynôme minimale sont

$$P_f(x) = -(x-\lambda)^5, \quad m_f(x) = (x-\lambda)^3,$$

et la dimension du sous espace propre correspond à la valeur propre λ vaut 2. Alors dans ce cas le nombre des blocs vaut 3 et l'ordre du plus grand bloc vaut 2 ainsi la formde Jordan est

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{matrix}} \end{pmatrix}.$$

Si la dimension du sous espace propre vaut 3 dans ce cas on a trois bloc et l'ordre du plus grand vaut 3 ce qui donne

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} \boxed{\lambda} & 0 \\ 0 & \boxed{\lambda} \end{matrix} \end{pmatrix}.$$

Exemple 6 Soit la matrice

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

le polynôme caractéristique vaut

$$(x-2)^3(x-1),$$

et le polynôme minimal vaut

$$(x-2)^3(x-1),$$

ainssi la forme de Jordan de cette matrice est

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{matrix}} & \\ & \boxed{1} \end{pmatrix},$$

On note par v_1, v_2, v_3 les vecteurs qui engendrent le sous espace caracrtéristique N_2 et v_4 celui qui engendre N_1. Ce dernier vaut

$$v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Or N_2 est définie par

$$N_2 = \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - 2\,\mathrm{I})^3,$$

le calcul fournit

$$N_2 = \operatorname{Vect}\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

Pour la construction de la base on considère les étapes suivantes

1. On choisit v_3 dans l'ensemble
$$N_2 \ \setminus \ \mathrm{Ker}\,(\,\mathcal{A} \,-\, 2\,\mathrm{I}\,)^2\,,$$
à titre d'exemple
$$v_3 \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\,.$$

2. Le vecteur v_2 est définit par
$$v_2 \;=\; (\,\mathcal{A} \,-\, 2\,\mathrm{I}\,)\,v_3 \;\Longrightarrow\; v_2 \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\,.$$

3. Le vecteur v_1 est donné par
$$v_1 \;=\; (\,\mathcal{A} \,-\, 2\,\mathrm{I}\,)\,v_2 \;\Longrightarrow\; v_1 \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\,.$$

ainsi la matrice de passage vaut
$$P \;=\; \left(\begin{array}{c|c|c|c} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array}\right) \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\,.$$

2

Formes Bilinéaires

2.1 Cas de dimension quelconque

Définition 6 (Forme Bilinéaire) *Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel, on appelle une forme bilinéaire sur $\mathbb{E}$ toute application*

$$b \; : \; \mathbb{E} \times \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{K}, \quad (X , Y) \longrightarrow b(X , Y),$$

telle que b est linéaire par rapport à chaque variable, autrement dit

$$\forall \; X_1, \; X_2, \; Y_1, \; Y_2, \; X, \; Y \; \in \; \mathbb{E}, \quad \forall \; \lambda, \; \mu \; \in \; \mathbb{K} \; :$$

$$\begin{cases} b(\lambda X_1 + \mu X_2 , Y) = \lambda \, b(X_1 , Y) + \mu \, b(X_2 , Y), \\ b(X , \lambda Y_1 + \mu Y_2) = \lambda \, b(X , Y_1) + \mu \, b(X , Y_2). \end{cases}$$

Exemple 7 Soit $\mathbb{E}$ le $\mathbb{R}$ - espace vectoriel des fonctions continues sur un intervalle fermé borné $[a , b]$

$$\mathbb{E} = C^0\big([a , b] , \mathbb{R}\big).$$

On définit la relation b sur $\mathbb{E}$ par

$$\forall \, f, \; g \; \in \; \mathbb{E} \; : \quad b(f , g) = \int_a^b f(t) \, g(t) \, dt.$$

Il est claire que cette relation est bien une application car

$$\forall \, f, \; g \; \in \; \mathbb{E} \; : \quad | \; b(f , g) \; | < +\infty.$$

De plus pour tout f, f_1, f_2, g, g_1 et g_2 éléments de $\mathbb{E}$ et pour tout λ et μ deux éléments de $\mathbb{R}$, le calcul fournit

$$b(\lambda f_1 + \mu f_2 , g) = \lambda \, b(f_1 , g) + \mu \, b(f_2 , g).$$

donc b est linéaire par rapport à la première variable.

$$b(f , \lambda g_1 + \mu g_2) = \lambda \, b(f , g_1) + \mu \, b(f , g_2).$$

donc b est linéaire par rapport à la seconde variable.

Définition 7 (Symétrie) *Soit b une forme bilinéaire sur un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel $\mathbb{E}$, on dit que*

1. *La forme b est une forme symétrique si*

$$\forall \; X, \; Y \; \in \; \mathbb{E} \; : \quad b(X , Y) = b(Y , X).$$

2. *La forme b est une forme anti - symétrique si*

$$\forall\, X,\, Y \in \mathbb{E} : \quad b(X, Y) = -b(Y, X).$$

Exemple 8 Vu la forme bilinéaire donnée par l'Exemple 7 page 25 et vu le fait que

$$\forall\, f,\, g \in \mathbb{E} : \quad \int_a^b f(t)\, g(t)\, dt = \int_a^b g(t)\, f(t)\, dt,$$

on conclut que

$$\forall\, f,\, g \in \mathbb{E} : \quad b(f, g) = b(g, f),$$

donc cette forme est bien une forme symétrique.

Lemme 1 *Soit b une forme bilinéaire sur un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel $\mathbb{E}$. Alors*

1. *Le noyau de b est donné par*

$$\mathcal{N}(b) = \{ Y \in \mathbb{E} /\ \forall\, X \in \mathbb{E} : \quad b(X, Y) = 0 \}.$$

2. *La forme b est non dégénérée si et seulement si*

$$\mathcal{N}(b) = \{0\}.$$

Exemple 9 On veut déterminer le noyau de la forme bilinéaire b définit sur $\mathbb{E} = C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ par

$$\forall\, f,\, g \in \mathbb{E} : \quad b(f, g) = f^{(1)}(0)\, g(0).$$

Par définition

$$\mathcal{N}(b) = \{ g \in \mathbb{E} /\ \forall\, f \in \mathbb{E} : \quad b(f, g) = 0 \},$$

donc si g est un élément du noyau de b alors

$$\forall\, f \in \mathbb{E} : \quad f^{(1)}(0)\, g(0) = 0,$$

ce qui donne que

$$g(0) = 0,$$

finalement

$$\mathcal{N}(b) = \{ g \in \mathbb{E} : \quad g(0) = 0 \},$$

on remarque que $\mathcal{N}(b) \neq \{0\}$, donc b est dégénérée.

Définition 8 (Transposée d'une forme bilinéaire) *Soit b une forme bilinéaire sur un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel $\mathbb{E}$, on appelle la transposée de b et on la note ${}^t b$ la forme bilinéaire définie par*

$$\forall\, X,\, Y \in \mathbb{E} : \quad {}^t b(X, Y) = b(Y, X).$$

Exemple 10 Soit le $\mathbb{R}$ - espace vectoriel des fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ qu'on le note

$$\mathbb{E} = C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}),$$

et soit l'application bilinéaire définie sur $\mathbb{E}$ par

$$\forall\, f,\, g \in \mathbb{E} : \quad b(f, g) = f^{(1)}(0)\, g(0),$$

alors la transposée de b est définie par

$$\forall\, f,\, g \in \mathbb{E} : \quad {}^t b(f, g) = g^{(1)}(0)\, f(0).$$

Définition 9 (Definie positive, Définie négative) *Soit b une forme bilinéaire sur un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel $\mathbb{E}$. Alors*

1. *La forme b est positive si*
$$\forall\, X \in \mathbb{E} : \quad b(X, X) \geq 0 .$$
2. *La forme b est négative si*
$$\forall\, X \in \mathbb{E} : \quad b(X, X) \leq 0 .$$
3. *La forme b est définie positive si*
$$\begin{cases} \forall\, X \in \mathbb{E} : \quad b(X, X) \geq 0 . \\ b(X, X) = 0 \iff X = 0 . \end{cases}$$
4. *La forme b est définie négative si*
$$\begin{cases} \forall\, X \in \mathbb{E} : \quad b(X, X) \leq 0 . \\ b(X, X) = 0 \iff X = 0 . \end{cases}$$

Exemple 11

1. Vu l'application b de l'Exemple 7 page 25 on a
$$\forall\, f \in \mathbb{E} : \quad b(f, f) = \int_a^b f^2(t)\, dt ,$$
vu les propriétés des intégrales il est simple de voir que
$$\forall\, f \in \mathbb{E} : \quad b(f, f) \geq 0 ,$$
de plus
$$b(f, f) = 0 \iff \int_a^b f^2(t)\, dt = 0 ,$$
vu que f est continue alors nécessairement
$$f \equiv 0 ,$$
donc b est définie positive.
2. Soit $\mathbb{E}$ l'ensemble des fonctions f de $[\,a\,,\,b\,]$ dans $\mathbb{R}$ pas nécessairement continuent et vérifiant
$$\int_a^b \big(f(t)\big)^2\, dt < +\infty ,$$
on définit la relation b sur $\mathbb{E}$ par
$$\forall\, f,\, g \in \mathbb{E} : \quad b(f, g) = \int_a^b f(t)\, g(t)\, dt .$$
Il est clair que cette relation est une application sur $\mathbb{E}$ cela est dû à l'inégalité de Cauchy - Schwartz
$$\forall\, f,\, g \in \mathbb{E} : \left| \int_a^b f(t)\, g(t)\, dt \right| \leq \left(\int_a^b \big(f(t)\big)^2\, dt \right)^{1/2} \left(\int_a^b \big(g(t)\big)^2\, dt \right)^{1/2},$$
qui permet de conclure que
$$\forall\, f,\, g \in \mathbb{E} : \quad |\, b(f, g)\, | < +\infty .$$

Cette forme est positive car

$$\forall\, f \in \mathbb{E} : \quad b(f, f) = \int_a^b \big(f(t)\big)^2\, dt \geq 0 ,$$

par contre elle n'est pas définie positive car pour

$$f(t) = \begin{cases} 1 \; si \; t = \dfrac{a+b}{2} , \\ \\ 0 \; si \; t \neq \dfrac{a+b}{2} , \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad f \not\equiv 0 , \qquad b(f, f) = 0 .$$

donc cette forme n'est pas définie positive.

2.2 Cas de dimension finie

Définition 10 (Matrice associée à une forme bilinéaire) *Soient $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel de dimension finie n, b une forme bilinéaire définie sur $\mathbb{E}$ et*

$$\mathcal{B} = \{ e_1 , \cdots , e_n \}$$

une base de $\mathbb{E}$. On appelle la matrice associée à b dans la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{E}$ et on la note $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(b)$ la matrice suivante

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(b) = \begin{pmatrix} b(e_1, e_1) \cdots b(e_1, e_n) \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ b(e_n, e_1) \cdots b(e_n, e_n) \end{pmatrix} .$$

Exemple 12 Soient $\mathbb{E} = \mathbb{R}^3$ vu comme étant un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel, $\{ e_i \}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et b une forme bilinéaire définie sur $\mathbb{E}$ par

$$\forall\, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \; Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{E} : \quad b(X, Y) = x_1\, y_2 + x_2\, y_1 + 2\, x_3\, y_3 - x_1\, y_3 .$$

La base canonique vaut

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \; e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \; e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ,$$

et le calcul fournit

$$\begin{aligned} b(e_1, e_1) &= 0 , \quad b(e_1, e_2) = 1 , \quad b(e_1, e_3) = -1 , \\ b(e_2, e_1) &= 1 , \quad b(e_2, e_2) = 0 , \quad b(e_2, e_3) = 0 , \\ b(e_3, e_1) &= 0 , \quad b(e_3, e_2) = 0 , \quad b(e_3, e_3) = 2 , \end{aligned}$$

ainsi

$$\mathcal{M}_{e_i}(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} .$$

Lemme 2 *Soient $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel de dimension finie n, b une forme bilinéaire définie sur $\mathbb{E}$ et $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{E}$. Si x et y sont deux vecteurs de $\mathbb{E}$ et si on note*

$$X = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x) , \quad Y = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(y) ,$$

alors

$$b(x, y) = {}^t X\, \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(b)\, Y .$$

Proposition 2 (Formule de changement des bases) *Soient $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel de dimension finie n, b une forme bilinéaire sur $\mathbb{E}$ et $\mathcal{B}$, $\overline{\mathcal{B}}$ deux base de $\mathbb{E}$. Alors*

$$\mathcal{M}_{\overline{\mathcal{B}}}(\ b\ )\ =\ {}^{t}P\ \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\ b\ )\ P\ , \tag{2.1}$$

avec P c'est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\overline{\mathcal{B}}$.

Exemple 13 On considère la forme bilinéaire de l'exemple 12 page 28. On veut déterminer la matrice associée à cette forme dans la base $\mathcal{B}'$ formée par les vecteurs

$$\varepsilon_1\ =\ \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\ ,\ \varepsilon_2\ =\ \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\ ,\ \varepsilon_3\ =\ \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\ ,$$

on a déja la matrice associée à b dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, de plus la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}'$ vaut

$$P\ =\ \begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}\ ,$$

ce qui donne

$${}^{t}P\ =\ \begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}\ ,$$

il suffit d''utiliser la formule (2.1) page 29 pour avoir la matrice associée dans la base $\mathcal{B}'$

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(\ b\ )\ =\ {}^{t}P\ \mathcal{M}_{e_i}\ P\ =\ \begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}\ .$$

finalement

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(\ b\ )\ =\ \begin{pmatrix}3&2&2\\2&1&2\\3&3&2\end{pmatrix}\ .$$

Proposition 3 *Soit b une forme bilinéaire sur un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel $\mathbb{E}$ de dimension finie. Alors le rang de la forme b est le rang de la matrice associée à cette forme dans une base quelconque de $\mathbb{E}$.*

$$\text{rg}\ b\ =\ \text{rg}\ \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\ b\ )\ . \tag{2.2}$$

Proposition 4 *Soit b une forme bilinéaire sur un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel $\mathbb{E}$ de dimension finie n. Alors b est non dégénérée si et seulement si*

$$\text{rg}\ (\ b\ )\ =\ n\ =\ \dim \mathbb{E}\ .$$

Définition 11 (Déscriminant d'une forme bilinéaire) *Soient $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel de dimension finie et b une forme bilinéaire définie sur $\mathbb{E}$, alors on appelle le déscriminant de b le déterminant de la matrice associée à cette forme dans une base quelconque.*

Proposition 5 (Noyau) *Le noyau de b est le noyau de la matrice qui représente b dans une base quelconque de $\mathbb{E}$.*

Théorème 8 (Théorème du rang pour les formes bilinéaires) *Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel de dimension finie et soit b une forme bilinéaire sur $\mathbb{E}$ alors*

$$\dim \mathbb{E}\ =\ \text{rg}\ b\ +\ \dim \mathcal{N}(\ b\ )\ . \tag{2.3}$$

2.3 Formes quadratiques

2.3.1 Cas de dimension quelconque

Définition 12 (Forme quadratique, Forme pôlaire) *Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel et soit $\mathbf{Q}$ une application de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{K}$. On dit que $\mathbf{Q}$ est une forme quadratique sur $\mathbb{E}$ s' il existe une forme bilinéaire symétrique $\mathcal{S}$ définie sur $\mathbb{E}$ telle que*

$$\forall\ X \in \mathbb{E} : \quad \mathbf{Q}(X) = \mathcal{S}(X, X).$$

La forme bilinéaire symétrique $\mathcal{S}$ s'appelle la forme pôlaire associée à la forme quadratique $\mathbf{Q}$.

Proposition 6 (Unicité et détermination de la forme pôlaire) *Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel et $\mathbf{Q}$ une forme quadratique sur $\mathbb{E}$. Alors il existe une unique forme bilinéaire symétrique $\mathcal{S}$ définie sur $\mathbb{E}$ telle que*

$$\forall\ X \in \mathbb{E} : \quad \mathbf{Q}(X) = \mathcal{S}(X, X),$$

de plus la forme $\mathcal{S}$ est définie par l'expression

$$\forall\ X, Y \in \mathbb{E} : \quad \mathcal{S}(X, Y) = \frac{1}{2}\left[\mathbf{Q}(X + Y) - \mathbf{Q}(X) - \mathbf{Q}(Y)\right]. \tag{2.4}$$

Exemple 14 Soit $\mathbb{E} = \mathbb{R}[X]$ vu comme étant un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel et soit l'application $\mathbf{Q}$ définie sur $\mathbb{E}$ par la relation

$$\forall\ p \in \mathbb{E} : \quad \mathbf{Q}(p) = \int_{-1}^{+1} p(x)^2\, dx.$$

On veut montrer que $\mathbf{Q}$ est une forme quadratique sur $\mathbb{E}$. Alors on construit l'application

$$\forall\ p, q \in \mathbb{E} : \quad \mathcal{S}(p, q) = \frac{1}{2}\left[\mathbf{Q}(p + q) - \mathbf{Q}(p) - \mathbf{Q}(q)\right],$$

le calcul fournit

$$\forall\ p, q \in \mathbb{E} : \quad \mathcal{S}(p, q) = \int_{-1}^{+1} p(x)\, q(x)\, dx,$$

il suffit de vérifier que $\mathcal{S}$ ainsi définie représente une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{E}$ pour pouvoir conclure que $\mathbf{Q}$ est une forme quadratqiue sur $\mathbb{E}$

Définition 13 (noyau, Caractére non dégénérée, Définie positive) *Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel et $\mathbf{Q}$ une forme quadratique sur $\mathbb{E}$. Alors*

— *On appelle le noyau de $\mathbf{Q}$ le noyau de la forme pôlaire associée à $\mathbf{Q}$: $\mathcal{N}(\mathbf{Q}) = \mathcal{N}(\mathcal{S})$.*
— *On dit que $\mathbf{Q}$ est non dégénérée si la forme pôlaire associée à $\mathbf{Q}$ est non dégénérée.*
— *On dit que $\mathbf{Q}$ est définie positive si sa forme pôlaire associée est définie positive.*

Proposition 7 *Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel et $\mathbf{Q}$ une forme quadratqiue sur $\mathbb{E}$ alors*

1. *La forme $\mathbf{Q}$ est définie positive si et seulement si*

$$\forall\ X \in \mathbb{E} : \quad \mathbf{Q}(X) \geq 0, \quad \mathbf{Q}(X) = 0 \iff X = 0.$$

2. *Si $\mathbf{Q}$ où $-\mathbf{Q}$ est définie positive alors $\mathbf{Q}$ est nécéssairement non dégénérée.*

2.3.2 Cas de dimension finie

Définition 14 (Matrice d'une forme quadratique) *Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel de dimension finie n et soit $\mathbf{Q}$ une forme quadratique sur $\mathbb{E}$, on définit la matrice associée à la forme quadratique $\mathbf{Q}$ comme étant la matrice associée à sa forme pôlaire $\mathcal{S}$.*

Définition 15 (Polynôme homogène) *Soit $\mathbb{Q} \in \mathbb{K}[\, X_1 \,,\, \cdots \,,\, X_n \,]$, on dit qu'il est homogène de degré deux si*

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{K} \,,\ \forall\, X \in \mathbb{K}^n : \quad \mathbb{Q}(\,\lambda\, X\,) = \lambda^2\, \mathbb{Q}(\, X\,)\,.$$

Remarque 2.1 (Utile). Un polynôme $\mathbb{Q}$ est homogène de degré deux si et seulement s'il s'écrit sous la forme

$$\forall\, X \in \mathbb{K}^n : \quad \mathbb{Q}(\, X\,) = \sum_{k,l\,=\,1}^{n} \alpha_{kl}\; x_k\; x_l\,.$$

avec $\alpha_{kl} \in \mathbb{K}$ des coefficients fixés.

Proposition 8 *Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel de dimension finie n, et $\mathbf{Q}$ une application définie sur $\mathbb{E}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. Alors $\mathbf{Q}$ est une forme quadratique sur $\mathbb{E}$ si et seulement si elle est un polynôme homogène de degré deux.*

2.3.3 Orthogonalité

Définition 16 (Orthogonalité) *Soit b une forme bilinéaire symétrique sur un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel $\mathbb{E}$, $x,\ y$ deux vecteurs de $\mathbb{E}$ et $\mathcal{A}$ un sous ensemble non vide de $\mathbb{E}$. Alors*

1. *On dit que les deux vecteurs x et y sont orthogonaux si*

$$b(\, x \,,\, y\,) = 0\,.$$

2. *On appelle l'orthogonal de $\mathcal{A}$ et on le note $\mathcal{A}^{\perp}$ le sous ensemble de $\mathbb{E}$ définit par*

$$\mathcal{A}^{\perp} = \{\, y \in \mathbb{E} \,/\ \ \forall\, x \in \mathcal{A} : \quad b(\, x \,,\, y\,) = 0\,\}\,.$$

Exemple 15 Soit $\mathbb{E} = \mathbb{R}_3[\, X\,]$ vu comme étant un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel, et soit l'application bilinéaire symétrique $\mathbf{b}$ définie sur $\mathbb{E}$ par

$$\forall\, \mathcal{P},\ \mathcal{Q} \in \mathbb{E} : \quad \mathbf{b}(\, \mathcal{P} \,,\, \mathcal{Q}\,) = \int_{-1}^{+1} \mathcal{P}(\, t\,)\, \mathcal{Q}(\, t\,)\, dt\,,$$

et soit $\mathbb{F}$ le sous ensemble de $\mathbb{E}$ définit par

$$\mathbb{F} = \Big\{\, \mathcal{Q} \in \mathbb{E} : \quad \forall\, x \in \mathbb{R},\quad \mathcal{Q}(\, x\,) = \alpha\, x^2 + \beta\, x\,,\ \ \alpha,\ \beta \in \mathbb{R} \Big\}\,,$$

on veut déterminer l'orthogonal de $\mathbb{F}$ par rapport à la forme $\mathbf{b}$. Alors

$$\mathcal{Q} \in \mathcal{A}^{\perp} \Longrightarrow \forall\, \mathcal{P} \in \mathcal{A} : \quad \mathbf{b}(\, \mathcal{P} \,,\, \mathcal{Q}\,) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \forall\, \alpha,\ \beta \in \mathbb{R} : \quad \mathbf{b}(\, \alpha\, X^2 + \beta\, X \,,\, \mathcal{Q}\,) = 0\,,$$

on utilise la bilinéairité de $\mathbf{b}$, en particulier sa linéairité par rapport à sa première variable on a

$$\forall\, \alpha,\ \beta \in \mathbb{R} : \quad \alpha\, \mathbf{b}(\, X^2 \,,\, \mathcal{Q}\,) + \beta\, \mathbf{b}(\, X \,,\, \mathcal{Q}\,) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{b}(\, X^2 \,,\, \mathcal{Q}\,) = 0\,,\quad \mathbf{b}(\, X \,,\, \mathcal{Q}\,) = 0\,,$$

or $\mathcal{Q} \in \mathbb{R}_3[\, X\,]$ donc

$$\exists\, a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R} : \quad \mathcal{Q}(\, X\,) = a\, X^3 + b\, X^2 + c\, X + d\,,$$

ce qui donne

$$a\,\mathbf{b}(\,X^2\,,\,X^3\,)\;+\;b\,\mathbf{b}(\,X^2\,,\,X^2\,)\;+\;c\,\mathbf{b}(\,X^2\,,\,X\,)\;+\;d\,\mathbf{b}(\,X^2\,,\,1\,)=0\,,$$
$$a\,\mathbf{b}(\,X\,,\,X^3\,)\;+\;b\,\mathbf{b}(\,X\,,\,X^2\,)\;+\;c\,\mathbf{b}(\,X\,,\,X\,)\;+\;d\,\mathbf{b}(\,X\,,\,1\,)=0\,,$$

alors le calcul fournit

$$3\,b\;+\;5\,d\;=\;0\,,\quad 3\,a\;+\;5\,c\;=\;0\,,$$

donc

$$\mathcal{Q}(\,X\,)\;=\;a\,\Big(\,X^3\;-\;\frac{3}{5}\,X\,\Big)\;+\;b\,\Big(\,X^2\;-\;\frac{3}{5}\Big)\,,\quad a,\,b\;\in\;\mathbb{R}\,,$$

ainsi

$$\mathcal{A}^{\perp}\;=\;\mathrm{Vect}\,\Big\langle\,X^3\;-\;\frac{3}{5}\,X\;,\;X^2\;-\;\frac{3}{5}\Big\rangle\,.$$

Lemme 3 *Soient $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel, b une forme bilinéaire symétrique définie sur $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ un sous espace vectoriel de $\mathbb{E}$ de dimenssion finie. Alors le vecteur $w\in\mathbb{F}^{\perp}$ si et seulement si il est orthogonal à une base de $\mathbb{F}$.*

Exemple 16 On considère l'exemple 15 page 31 dans lequel on à determiné l'orthogonal de l'ensemble

$$\mathbb{F}\;=\;\Big\{\,\mathcal{Q}\;\in\;\mathbb{E}\;:\quad\forall\,x\;\in\;\mathbb{R}\,,\quad\mathcal{Q}(\,x\,)\;=\;\alpha\,x^2\;+\;\beta\,x\,,\;\;\alpha,\,\beta\;\in\;\mathbb{R}\Big\}\;,$$

il est clair que cet ensemble est un sous espace vectoriel de $\mathbb{E}=\mathbb{R}_3[\,X\,]$ et que la famille

$$\mathcal{B}\;=\;\{\,X^2\,,\;X\,\}\;,$$

est une base de $\mathbb{F}$, ainsi l'orthogonale de $\mathbb{F}$ est définit par

$$\mathbb{F}^{\perp}\;=\;\Big\{\,w\;\in\;\mathbb{E}\;:\quad b(\,X^2\,,\,w\,)\;=\;b(\,X\;,\;w\,)\;=\;0\Big\}\;,$$

et le calcule conduit au même résultat que dans l'exemple 15.

Proposition 9 *Soit b une forme bilinéaire symétrique sur un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel $\mathbb{E}$ et $\mathcal{A}$ un sous ensemble non vide de $\mathbb{E}$. Alors l'orthogonal de $\mathcal{A}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{E}$.*

Proposition 10 *Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel de dimension quelconque et soit b une forme bilinéaire symétrique définie sur $\mathbb{E}$, alors les assertions suivantes sont vraies.*

1. $\{\,0\,\}^{\perp}\;=\;\mathbb{E}\,.$
2. $\mathbb{E}^{\perp}\;=\;\mathcal{N}(\,b\,)\,.$
3. $\forall\,\mathcal{B}\;\subset\;\mathbb{E}\,,\;\;\mathcal{B}\;\neq\;\emptyset\;:\quad\mathcal{N}(\,b\,)\;\subset\;\mathcal{B}^{\perp}\,.$

Proposition 11 *Soient $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, b une forme bilinéaire symétrique définie sur $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ un sous espace vectoriel de $\mathbb{E}$. Alors*

1. $\dim\mathbb{E}\;=\;\dim\mathbb{F}\;+\;\dim\mathbb{F}^{\perp}\;-\;\dim\big(\,\mathbb{F}\;\cap\;\mathcal{N}(\,b\,)\,\big)\,.$
2. $\mathbb{F}^{\perp\,\perp}\;=\;\mathbb{F}\;+\;\mathcal{N}(\,b\,)\,.$

Définition 17 (Orthogonalité par rapport à une forme quadratique) *On dit que deux vecteurs sont orthogononaux par rapport à une forme quadratique* $\mathbf{Q}$*, s'ils sont orthogonaux par rapport à sa forme pôlaire $\mathcal{S}$.*

Définition 18 (Vecteur isotrope) *Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel et* $\mathbf{Q}$ *une forme quadratique sur $\mathbb{E}$, on dit que v est un vecteur isotrope si*

$$\mathbf{Q}(\,v\,)\;=\;0\,.$$

L'ensemble des vecteurs isotropes de $\mathbf{Q}$ *est appellé le cône isotrope et est noté*

$$\mathcal{I}(\,\mathbf{Q}\,)\;=\;\{\,X\;\in\;\mathbb{E}\;:\quad\mathbf{Q}(\,X\,)\;=\;0\,\}\;.$$

Exemple 17 Soit $\mathbb{E} = \mathbb{R}[X]$ vu comme étant un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel et soit la forme quadratique $\mathbf{Q}$ définie sur $\mathbb{E}$ par

$$\forall\, p \in \mathbb{E} : \quad \mathbf{Q}(p) = p^{(1)}(0)\, p(0),$$

et on veut déterminer le cône isotrope de cette forme, alors soit $\mathbf{Q}(p) = 0$ donc

$$p^{(1)}(0)\, p(0) = 0,$$

or p est un polynôme donc

$$p(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k\, x^k, \quad p^{(1)}(x) = \sum_{k=1}^{m} k\, a_k\, x^{k-1},$$

alors il est simple de voir que

$$p^{(1)}(0)\, p(0) = a_1\, a_0$$

donc

$$p \in \mathcal{I}(\mathbf{Q}) \iff p(x) = \sum_{k=1}^{m} a_k\, x^k \text{ et } a_1\, a_0 = 0.$$

Remarque 2.2 (Importante). Contrairement au noyau dans le cas général le cône isotrope n'est pas un sous espace vectoriel.

Lemme 4 *Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel et $\mathbf{Q}$ une forme quadratique sur $\mathbb{E}$. Alors*

$$\mathcal{N}(\mathbf{Q}) \subset \mathcal{I}(\mathbf{Q}).$$

Définition 19 (Sous espaces isotropes) *Soient $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$ espace vectoriel, $\mathbb{F}$ un sous espace vectoriel de $\mathbb{E}$ et $\mathbf{Q}$ une forme quadratique definie sur $\mathbb{E}$. On dit que $\mathbb{F}$ est un sous espace isotrope de $\mathbb{E}$ si*

$$\mathbb{F} \cap \mathbb{F}^{\perp} \neq \{0\}. \tag{2.5}$$

Proposition 12 *Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$ - espac vectoriel et $\mathbf{Q}$ une forme quadratique definie sur $\mathbb{E}$. Alors $\mathbb{E}$ admet des sous espaces isotropes par rapport à $\mathbf{Q}$ si et seulement si*

$$\mathcal{I}(\mathbf{Q}) \neq \{0\}.$$

Proposition 13 *Soient $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel de dimension finie, $\mathbb{F}$ un sous espace vectoriel de $\mathbb{E}$ et $\mathbf{Q}$ une forme quadratique definie sur $\mathbb{E}$. Alors*

$$\mathbb{E} = \mathbb{F} \oplus \mathbb{F}^{\perp},$$

si et seulement si $\mathbb{F}$ est un sous espace vectoriel non - isotrope.

2.4 Bases orthogonales

Définition 20 (Base orthogonale) *Soient $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel de dimension finie n, b une forme bilinéaire symétrique et $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{E}$ avec*

$$\mathcal{B} = \{e_1, \cdots, e_n\}.$$

Alors

1. *On dit que $\mathcal{B}$ est une base orthogonale de $\mathbb{E}$ si*

$$\forall\, k, l = 1 \cdots n,\ k \neq l : \quad b(e_k, e_l) = 0.$$

2. *On dit que $\mathcal{B}$ est normalisée si*

$$\forall\ k\ =\ 1 \cdots n\ :\quad b(\,e_k\ ,\ e_k\,)\ =\ 1\ .$$

3. *On dit que $\mathcal{B}$ est orthonormée si elle est à la fois orthogonale et normalisée*

$$\forall\ k,\ l\ =\ 1 \cdots n\ :\ b(\,e_k\ ,\ e_l\,)\ =\ \begin{cases} 1\ Si\ k\ =\ l\ , \\ \\ 0\ Si\ k\ \neq\ l\ . \end{cases}$$

Remarque 2.3 (Utile). Soit b une forme bilinéaire symétrique et $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{E}$, alors

1. $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\,b\,)$ est diagonale si et seulement si $\mathcal{B}$ est orthogonale.
2. $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\,b\,)$ admet que des 1 sur son diagonale si et seulement si $\mathcal{B}$ est normalisée.
3. $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\,b\,) = \mathbf{I}$ si et seulement si $\mathcal{B}$ est orthonormée.

Théorème 9 (Existence des bases orhtogonales) *Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel de dimension finie n et soit b une forme bilinéaire symétrique. Alors $\mathbb{E}$ admet des bases orthogonales par rapport à la forme b.*

2.5 Recherche des bases orthogonales

2.5.1 Méthode de Gauss.

Cette méthode s'applique uniquement lorsque la forme quadratqiue admet dans son expression au moins un terme carrée. Soit $\mathbb{R}^3$ vu comme étant un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel et $\mathbf{Q}$ une forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$\forall\ x\ \in\ \mathbb{R}^3\ :\quad \mathbf{Q}(\,x\,)\ =\ x_1^2\ +\ 2\,x_2^2\ +\ 5\,x_3^2\ +\ 2\,x_1\,x_2\ -\ 4\,x_2\,x_3\ .$$

On considère un terme carré quelconque par exemple x_1^2

1. On ordone suivant le paramètre x_1

$$\mathbf{Q}(\,x\,)\ =\ \underbrace{x_1^2\ +\ 2\,x_1\,x_2}_{\text{Termes en } x_1}\ + 2\,x_2^2\ +\ 5\,x_3^2\ -\ 4\,x_2\,x_3\ .$$

2. On écrit les termes en x_1 comme le début d'un carré

$$\mathbf{Q}(\,x\,)\ =\ \underbrace{(\,x_1\ +\ x_2\,)^2\ -\ x_2^2}_{\text{Termes en } x_1}\ + 2\,x_2^2\ +\ 5\,x_3^2\ -\ 4\,x_2\,x_3\ .$$

3. On obtient le carré d'une forme linéaire et des termes qui ne contiennt pas x_1

$$\mathbf{Q}(\,x\,)\ =\ (\,x_1\ +\ x_2\,)^2\ +\ \underbrace{x_2^2\ +\ 5\,x_3^2\ -\ 4\,x_2\,x_3}_{\text{Terme ne contient pas } x_1}\ .$$

4. On refait le même travail sur les termes qui ne contiennent pas x_1 par exemple sur le terme en x_2

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(\,x\,) &= (\,x_1\ +\ x_2\,)^2\ +\ \underbrace{x_2^2\ -\ 4\,x_2\,x_3}_{\text{Terme en } x_2} + 5\,x_3^2 \\ &= (\,x_1\ +\ x_2\,)^2\ +\ \underbrace{(\,x_2\ -\ 2\,x_3\,)\ -\ 4\,x_3^2}_{\text{Terme en } x_2} + 5\,x_3^2 \end{aligned}$$

5. On continu l'opération jusqu' à la disparition de tous les termes rectangles
$$\mathbf{Q}(x) = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 - 2 x_3) + x_3^2 .$$

Cette méthode est util par contre elle ne peut être utilisée que si dans toute les étapes il y a au moins un terme carré dans le cas contraire il faut utiliser la méthode qui sera traitée dans la prochaine sous section.

Proposition 14 *Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel de dimension finie n et $\mathbf{Q}$ une forme quadratique sur $\mathbb{E}$ qui peut être écrit sous la forme*
$$\mathbf{Q}(x) = \sum_{k=1}^{p} \tilde{x}_k^2 , \quad p \leq n ,$$
par utilisation de la méthode précédente. Alors les application $\mathcal{P}_k$ qui définie $\tilde{x}_k$ par l'expréssion
$$\forall\, x \in \mathbb{E}, \forall\, k = 1 \cdots p : \quad \tilde{x}_k = \mathcal{P}_k(x) ,$$
sont linéairement indépendantes.

2.5.2 Méthode des dérivées partielles.

Cette méthode s'applique lorsque la forme quadratqiue n'admet aucun terme carré dans son expression. Soit $\mathbb{E} = \mathbb{R}^3$ vu comme étant un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel et soit la forme quadratique $\mathbf{Q}$ définie sur $\mathbb{R}^3$ par
$$\forall\, x \in \mathbb{R}^3 : \quad \mathbf{Q}(x) = 5\, x_1\, x_2 + 6\, x_1\, x_3 + 3\, x_2\, x_3 .$$

1. On choisit un terme rectangle $\mathcal{K}\, x_k\, x_l$ avec $\mathcal{K} \neq 0$. Dans notre cas on prend
$$5\, x_1\, x_2 .$$
2. On calcule les dérivées partielles
$$\partial_{x_k} \mathbf{Q} , \quad \partial_{x_l} \mathbf{Q} .$$
Dans notre cas on a
$$\partial_{x_1} \mathbf{Q}(x) = 5\, x_2 + 6\, x_3 , \quad \partial_{x_2} \mathbf{Q}(x) = 5\, x_1 + 3\, x_3 .$$
3. On écrit $\mathbf{Q}$ sous la forme
$$\forall\, x \in \mathbb{E} : \quad \mathbf{Q}(x) = \frac{1}{\mathcal{K}}\, \partial_{x_k} \mathbf{Q}(x)\, \partial_{x_l} \mathbf{Q}(x) + \text{Terme Correctife} .$$
Dans notre cas on a
$$\forall\, x \in \mathbb{E} : \quad \mathbf{Q}(x) = \frac{1}{5} (5\, x_2 + 6\, x_3) (5\, x_1 + 3\, x_3) - \frac{18}{5} x_3^2 .$$
4. On aura une écriture de la forme
$$\forall\, x \in \mathbb{E} : \quad \mathbf{Q}(x) = \frac{1}{\mathcal{K}} \varphi_1(x)\, \varphi_2(x) + \text{Terme Correctife} ,$$
avec
$$\varphi_1 \equiv \partial_k \mathbf{Q} , \quad \varphi_2 \equiv \partial_l \mathbf{Q} ,$$
alors on écrit
$$\varphi_1\, \varphi_2 \equiv \frac{1}{4} (\varphi_1 + \varphi_2)^2 - \frac{1}{4} (\varphi_1 - \varphi_2)^2 ,$$
pour avoir la forme finale
$$\forall\, x \in \mathbb{E} : \quad \mathbf{Q}(x) = \frac{1}{4\,\mathcal{K}} (\varphi_1 + \varphi_2)^2 - \frac{1}{4\,\mathcal{K}} (\varphi_1 - \varphi_2)^2 + \text{Terme Correctif} .$$
Dans notre cas on aura
$$\forall\, x \in \mathbb{E} : \quad \mathbf{Q}(x) = \frac{1}{20} (5\, x_1 + 5\, x_2 + 9\, x_3)^2 - \frac{1}{20} (5\, x_1 - 5\, x_2 - 3\, x_3) - \frac{18}{5} x_3^3 .$$

5. Si dans le terme correctif on a un terme rectangle on refait les mêmes étapes au niveau de ce terme, si on a un mélange des termes carrés et des termes rectangles on refait la méthode de Gauss au niveau de ce terme. Lorsqu'il ne reste que des termes carré la procédure s'achève.

Proposition 15 *Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel de dimension finie n et $\mathbf{Q}$ une forme quadratique definie sur $\mathbb{E}$ satisafaisant la méthode des dérivées partielles précédement mentionnées et donc elle peut être écrite sous la forme*

$$\sum_{k\,=\,1}^{p} \mathcal{P}_k(\,x\,)^2\,, \quad p \,\leq\, n\,,$$

avec $\mathcal{P}_k$ des applications linéaires. Alors la famille

$$\mathcal{P}_1\,,\,\cdots\,,\,\mathcal{P}_p\,,$$

est libre.

2.5.3 Résultat des deux méthodes.

Dans les deux méthodes précédentes la forme finale de l'application $\mathbf{Q}$ c'était

$$a_1\,\tilde{x}_1^2\,+\,\cdots\,+\,a_p\,\tilde{x}_p^2\,, \tag{2.6}$$

telle que dans le cas général

$$p\,\leq\,\dim\mathbb{E}\,.$$

Alors on peut écrire un système qui transforme x_i en $\tilde{x}_j$, en effet

$$\begin{pmatrix}\tilde{x}_1\\ \vdots\\ \tilde{x}_p\end{pmatrix} = \mathcal{A}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_p\end{pmatrix}, \tag{2.7}$$

alors soit la matrice

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \boxed{\mathcal{A}} & & 0 \\ & 1 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix},$$

ainsi on a

$$\begin{pmatrix}\tilde{x}_1\\ \vdots\\ \tilde{x}_n\end{pmatrix} = \mathbf{P}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},$$

d'où le résultat suivant.

Proposition 16 *La matrice $\mathbf{P}$ est une matrice inversible et $\mathbf{P}^{-\,1}$ est la matrice de passage entre la base $\{\,e_i\,\}$ de $\mathbb{E}$ dans laquelle la forme $\mathbf{Q}$ est initialement définie et la base $\{\,v_i\,\}$ dans laquelle cette forme s'ecrit sous comme la somme des carrées, telle que le vecteur v_i c'est la i émé colonne de la matrice $\mathbf{P}^{-\,1}$, de plus cette base est orthogonale.*

2.6 Classification des formes quadratiques

Théorème 10 (Sylvester) *Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel de dimenssion finie n et $\mathbf{Q}$ une forme quadratique sur $\mathbb{E}$. Alors il existe une base $\{ e_i \}$ de $\mathbb{E}$ telle que*

$$x = \sum_{k=1}^{n} x_k \, e_k \, ,$$

et

$$\mathbf{Q}(x) = \sum_{k=1}^{p} x_k^2 - \sum_{k=p+1}^{r} x_r^2 \, . \tag{2.8}$$

C'est à dire

$$\mathcal{M}_{e_i}(\mathbf{Q}) = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix}} & & & \\ & \boxed{\begin{matrix} -1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1 \end{matrix}} & & \\ & & 0 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 0 \end{pmatrix} . \tag{2.9}$$

Tel que

$$r = \operatorname{rg} (\mathbf{Q})$$

et p est un entier qui ne dépend que de la forme de $\mathbf{Q}$ et non de la base.

Définition 21 (Signature d'une forme quadratique) *Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel de dimenssion finie n et soit $\mathbf{Q}$ une forme quadratique sur $\mathbb{E}$ telle que sa réduction de Sylvester est donnée par l'équation (2.8). On appelle signature de la forme $\mathbf{Q}$ et on la note $\operatorname{sing}(\mathbf{Q})$ le couple*

$$\operatorname{sing} (\mathbf{Q}) = (p \, , \, r - p) \, .$$

Lemme 5 *Soit $\mathbf{Q}$ une forme quadratique sur un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel $\mathbb{E}$ de dimenssion n. Alors on a les assertions suivantes*

1. *$\mathbf{Q}$ est définie positive si et seulement si*

$$\operatorname{sing} (\mathbf{Q}) = (n \, , \, 0) \, .$$

2. *$\mathbf{Q}$ est non dégénérée si et seulement si*

$$\operatorname{sing} (\mathbf{Q}) = (p \, , \, n - p) \, .$$

Remarque 2.4 (Importante). La détermination de la réduction de Sylvester d'une forme quadratique ce fait en utilisant un mélange de la méthode de Gauss et de la méthode des dérivées partielles.

2.7 Exercices

Exercice 6 On définie la fonction suivante sur $\mathbb{R}_2[\,X\,] \times \mathbb{R}_2[\,X\,]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$

$$\forall\ P,\ Q\ \in\ \mathbb{R}_2[\,X\,]\ :\quad b(\,P, Q\,)\ =\ \int_{-1}^{+1} P(X)\ Q^{(1)}(X)\ dX\ .$$

1. Montrer qu'elle est bilinéaire et déterminer sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[\,X\,]$.
2. Discuter de deux facons différentes si elle est symétrique.
3. Écrire de deux facons différentes sa matrice dans la base

$$\left\{\,1\ ,\ 1 + X\ ,\ 1 + 2\,X + X^2\,\right\}\ .$$

4. Déterminer le noyau de b et discuter si elle est dégénérée.

Solution de l'exercice 6

1. Pour montrer qu'elle est bilinéaire il suffit de vérifier les codnitions de la définition de la bilinéairité et d'utiliser les propriété de l'intégration et de la dérivation.
   Dans la base canonique de $\mathbb{E}$ qui vaut
   $$\left\{\,1\ ,\ X\ ,\ X^2\,\right\}\ ,$$
   la matrice associée à b vaut
   $$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4/3 \\ 0 & 2/3 & 0 \end{pmatrix}$$
2. Pour voir si elle est symétrique dans un premier temps vu que sa matrice associée n'est pas symétrique donc b elle ne pas peut être symétrique. Une deuxième méthode de voir les choses vu que
   $$b(\,1\ ,\ X\,)\ =\ 2\,,\quad b(\,X\ ,\ 1\,)\ =\ 0 \Longrightarrow b(\,1\ ,\ X\,)\ \neq\ b(\,X\ ,\ 1\,)\,,$$
   on en déduit que b n'est pas symétrique.
3. Pour écrire la matrice associée à b dans la nouvelle base on a deux méthodes
   a. *En utilisant la définition.* Ce qui donne
   $$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 16/3 \\ 0 & 8/3 & 8 \end{pmatrix}\ .$$
   b. *En utilisant la formule de changement de base.* Dans ce cas la matrice de passage de la base canonique vers la nouvelle base vaut
   $$P\ =\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\ .$$
   la formule de changement de base donne alors
   $$\mathcal{M}_{nouvelle\ base}(\,b\,)\ =\ {}^t\,P\ \mathcal{M}_{canonique}(\,b\,)\ P\ =\ \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 16/3 \\ 0 & 8/3 & 8 \end{pmatrix}\ .$$

c. Pour déterminer le noyau de b on utilise le fait que le noyau d'une forme bilinéaire est le noyau de sa matrice associée dans une base quelconque ainsi le calcul fournit que

$$\mathcal{N}(b) = \text{Ker}\,\mathcal{M}_{base\ quelconque}(b) = \text{Vect}\langle 1 \rangle .$$

Vu que le noyau contient plus que le vecteur nul on conclut que cette forme est dégénérée.

Exercice 7 Soit q une forme quadratique sur un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel $\mathbb{E}$. On désigne par $\mathcal{A}^{\perp}$ l'orthogonale de $\mathcal{A}$ relativement à la forme q. Montrer que dans le cas où q est définie positive sur $\mathbb{E}$ alors

$$\forall\, \mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathbb{E},\ (\mathcal{A} \cup \mathcal{B})^{\perp} = (\mathcal{A} + \mathcal{B})^{\perp} .$$

Solution de l'exercice 7 Dans un premier temps on a

$$y \in (\mathcal{A} \cup \mathcal{B})^{\perp} \Longrightarrow \forall\, x \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B} : \quad \mathcal{S}(x, y) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \forall\, x \in \mathcal{A} : & \mathcal{S}(x, y) = 0 \\ & \text{et} \\ \forall\, x \in \mathcal{B} : & \mathcal{S}(x, y) = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \forall\, x \in \mathcal{A} : & \mathcal{S}(x, y) = 0 \\ & \text{et} \\ \forall\, x' \in \mathcal{B} : & \mathcal{S}(x', y) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \forall\, z = x + x' \in \mathcal{A} + \mathcal{B} : \quad \mathcal{S}(x, y) + \mathcal{S}(x', y) = 0$$

$$\Longrightarrow \forall\, z \in \mathcal{A} + \mathcal{B} : \quad \mathcal{S}(z, y) = 0 \Longrightarrow y\,(\mathcal{A} + \mathcal{B})^{\perp} ,$$

donc on a

$$(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})^{\perp} \subset (\mathcal{A} + \mathcal{B})^{\perp} . \tag{2.10}$$

Inverssement

$$y \in (\mathcal{A} + \mathcal{B})^{\perp} \Longrightarrow \forall\, z \in \mathcal{A} + \mathcal{B} : \quad \mathcal{S}(z, y) = 0 \Longrightarrow \forall\, x \in \mathcal{A},\ \forall\, x' \in \mathcal{B} : \quad \mathcal{S}(x + x', y) =$$
$$\Longrightarrow \forall\, x \in \mathcal{A},\ \forall\, x' \in \mathcal{B} : \quad \mathcal{S}(x, y) + \mathcal{S}(x', y) = 0$$

quitte à prendre une fois $x' = 0$ et x quelconque on a

$$\forall\, x \in \mathcal{A} : \quad \mathcal{S}(x, y) = 0 , \tag{2.11}$$

et une deuxième fois en prend $x = 0$ et x' quelconque on a

$$\forall\, x' \in \mathcal{B} : \quad \mathcal{S}(x', y) = 0 , \tag{2.12}$$

les deux relations (2.11) et (2.12) affirment que l'application $\mathcal{S}(\cdot\,,\ y)$ est nulle sur l'ensemble $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ ce qui donne que

$$\forall\, x \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B} : \quad \mathcal{S}(x, y) = 0 \Longrightarrow y \in (\mathcal{A} \cup \mathcal{B})^{\perp} ,$$

ce qui est exactement

$$(\mathcal{A} + \mathcal{B})^{\perp} \subset (\mathcal{A} \cup \mathcal{B})^{\perp} . \tag{2.13}$$

Une combinaison de (2.10) et (2.13) donne

$$(\mathcal{A} + \mathcal{B})^{\perp} = (\mathcal{A} \cup \mathcal{B})^{\perp} .$$

Exercice 8 Soient $\mathbb{R}_2[X]$ vue comme étant un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel et b une forme bilinéaire symétrique définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par

$$\forall\, \mathcal{P}, \mathcal{Q} \in \mathbb{R}_2[X] : \quad b(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) := \int_{-1}^{+1} \mathcal{P}(X)\,\mathcal{Q}(X)\,dX .$$

1. Déterminer l'orthogonale des deux ensembles

$$\mathcal{D}_1 := \left\{ \mathcal{P} \in \mathbb{R}_2[X] : \quad 2\,\mathcal{P} - X\,\mathcal{P}^{(1)} = 1 \right\},$$

$$\mathcal{D}_2 := \left\{ \mathcal{P} \in \mathbb{R}_2[X] : \quad \mathcal{P}(0) = \mathcal{P}^{(1)}(0) \right\}.$$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}_2[X]$ l'équation

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} : \quad b\big(\lambda x^2 + x + 1,\; X\,\mathcal{P}(X)\big) = 0\,.$$

Solution de l'exercice 8

1. Détermination de l'orthogonale.
   Pour le premier ensemble, il peut être écrit sous la forme

$$\mathcal{D}_1 = \mathrm{Vect}\langle X^2 \rangle + \left\{ \frac{1}{2} \right\},$$

   ce qui donne

$$\mathcal{D}_1^{\perp} = \mathrm{Vect}\,\langle X \rangle\,.$$

   Pour le second ensemble on a $\mathcal{D}_2 = \mathrm{Vect} < X^2, X + 1 >$, et on trouve que

$$\mathcal{D}_2^{\perp} = \mathrm{Vect}\left\langle X^2 + \frac{4}{5}X - \frac{3}{5} \right\rangle.$$

2. Résolution de l'équation. On trouve que la seul solution possible est le polynôme nul.

Exercice 9 Soient les applications suivantes définies sur $\mathbb{R}^3$ vu comme étant un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel

$$q_1(X) = x_1^2 + 2\,x_2^2 + x_3^2 - x_1\,x_2\,,$$

$$q_2(X) = x_1\,x_2 + x_1\,x_3 + x_2\,x_3\,,$$

$$q_3(X) = x_1^2 + x_2^2 - x_1\,x_2\,.$$

1. Montrer qu'elles représentent des formes quadratiques sur $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la matrice et la forme pôlaire correspondantes à chaque forme quadratique.
3. Déterminer le cône isotrope de chaque forme.
4. Déterminer la forme réduite de Sylvester, une base correspondante, la signature, le caractére d'être définie positive et le caractére d'être dégénérée de chaque forme.

Solution de l'exercice 9

1. Les applications forment des formes quadratiques parcequ'ils sont des polynômes homogènes de degré deux.
2. La forme pôlaire et la matrice correspondante
   a. Pour la première forme q_1.
      La matrice associée dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

      et la forme pôlaire vaut

$$x_1\,y_1 + 2\,x_2\,y_2 + x_3\,y_3 - \frac{1}{2}\,x_1\,y_2 - \frac{1}{2}\,x_2\,y_1\,.$$

b. Pour la deuxième forme q_2.
La matrice associée dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} ,$$

et la forme pôlaire vaut

$$\frac{1}{2} \left[x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_1 y_3 + x_3 y_1 + x_2 y_3 + x_3 y_2 \right] .$$

c. Pour la troisième forme q_3.
La matrice associée dans la base canonique et est

$$\begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

et la forme pôlaire vaut

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 - \frac{1}{2} x_1 y_2 - \frac{1}{2} x_2 y_1 .$$

3. Le cône isotrope.
   a. Pour la première forme.
   $$\mathcal{I}(q_1) = \{ 0 \} .$$
   b. Pour la deuxième forme.
   $$\mathcal{I}(q_2) = \mathrm{Vect} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \bigcup \left\{ \begin{pmatrix} - x_2 x_3 / (x_2 + x_3) \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \; / \; x_2 \neq - x_3 \right\} .$$
   c. Pour la troisième forme.
   $$\mathcal{I}(q_3) = \mathrm{Vect} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle .$$
4. Forme de Sylvester
   a. Pour la première frome. Elle se réduit en
   $$\left(x_1 - \frac{1}{2} x_2 \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2} x_2 \right) + x_3^2 ,$$
   dans la base
   $$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \; \frac{\sqrt{7}}{7} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} , \; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$
   elle est de signature
   $$\mathrm{sing} \; (q_1) = (3 , 0) ,$$
   donc elle est définie positive et non dégénérée.

b. Pour la deuxième frome. Elle se réduit en

$$\left(\frac{1}{2} x_1 + \frac{1}{2} x_2 + x_3 \right)^2 - x_3^2 - \left(\frac{1}{2} x_1 - \frac{1}{2} x_2^2 \right) ,$$

dans la base

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

elle est de signature

$$\text{sing} (q_2) = (1 , 2) ,$$

donc elle n'est pas définie positive et elle est dégénérée.

c. Pour la troisième frome. Elle se réduit en

$$\left(x_1 - \frac{1}{2} x_2 \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} x_2 \right) ,$$

dans la base

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \frac{\sqrt{3}}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

elle est de signature

$$\text{sing} (q_3) = (2 , 0) ,$$

donc elle n'est pas définie positive et elle est dégénérée.

Exercice 10 Soient $\mathbb{R}_2[X]$ vue comme étant un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel et $\mathcal{Q}$ une application définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par

$$\forall \mathcal{P} \in \mathbb{R}_2[X] : \quad \mathcal{Q}(\mathcal{P}) = \int_{-1}^{+1} \mathcal{P}(X) \mathcal{P}^{(2)}(X) \, d X .$$

1. Montrer de deux facons qu'il s'agit d'une forme quadratique sur $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer sa forme réduite de Sylvester, une base correspondante et le cône isotrope.
3. Montrer que $\mathbb{R}_2[X]$ admet des sous espaces isotropes relativement à la forme $\mathcal{Q}$ et déterminer l'un d'eux.

Solution de l'exercice 10

1. Pour la première méthode, vu que la'application suivante

$$\mathcal{S}(p , q) = \frac{1}{2} [\mathcal{Q}(p + q) - \mathcal{Q}(p) - \mathcal{Q}(q)] = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} p(x) \, p^{(2)}(x) \, dx ,$$

est bilinéaire symétrique donc $\mathcal{Q}$ est une forme quadratqiue.
Pour la deuxième méthode quitte à prendre

$$p(x) = a x^2 + b x + c ,$$

le calcul fournit

$$\mathcal{Q}(p) = \frac{4}{3} a^2 + 4 a c ,$$

qui est un polynôme homogène de degré deux donc $\mathcal{Q}$ est une forme quadratique.

2. Cette forme elle peut être réduite en

$$\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\, a \;+\; \sqrt{3}\, c \right)^2 \;-\; \left(\sqrt{3}\, c \right)^2 ,$$

dans la base

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\, x^2 \;,\;\; -\frac{\sqrt{3}}{2}\, x^2 \;+\; \frac{\sqrt{3}}{3} \;,\;\; x \;,$$

et son cône isotrope vaut

$$\mathcal{I}(\, \mathcal{Q}\,) \;=\; \mathrm{Vect}\big\langle -3\, x^2 \;+\; 1 \big\rangle \bigcup \mathrm{Vect}\;\langle\, x\, \rangle \;.$$

3. Vu que le cône isotrope diffère du singlotent zéro alors $\mathbb{R}_2[\, X\,]$ ademt des sous espaces isotropes par rapport à la forme $\mathcal{Q}$ l'un d'eux par exemple

$$\mathrm{Vect}\big\langle -3\, x^2 \;+\; 1 \;,\; x \big\rangle \;.$$

Exercice 11 Soit $\mathbb{R}_2[X]$ le $\mathbb{R}$ - espace vectoriel des polynômes à une indéterminée à coefficient dans $\mathbb{R}$ de degré au plus deux, et soit l'application

$$b \;:\; \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] \;\longrightarrow\; \mathbb{R} \;, \qquad (\, P, Q\,) \;\longmapsto\; b(\, P, Q\,) \;=\; \int_{-1}^{+1} P(X)\; Q(X)\; dX.$$

1. Montrer que b est une forme bilinéaire symétrique.
2. Déterminer la matrice associée à b dans la base de $\mathbb{R}_2[X]$ définie par

$$\left\{\, X^2 \;-\; 1 \;,\; X \;,\; 5\, X^2 \;-\; 1 \,\right\} \;.$$

3. Soit le sous ensemble de $\mathbb{R}_2[X]$ définit par

$$\mathcal{A} \;=\; \left\{\, P \;\in\; \mathbb{R}_2[X] \,/\; P(X) \;=\; \alpha\, X^2 \;+\; \beta\, X \;-\; \alpha \;,\; \text{tq} \;\; (\alpha, \beta) \;\in\; \mathbb{R}^2 \,\right\} \;,$$

déterminer l'orthogonale de $\mathcal{A}$ qu'on le note $\mathcal{A}^{\perp}$ relativement à la forme b

4. Déduire que

$$\mathbb{R}_2[X] \;=\; \mathcal{A} \;\oplus\; \mathcal{A}^{\perp} \;.$$

5. Discuter suivant les valeurs de $a \in \mathbb{R}$ l'existence des solutions dans $\mathbb{R}_2[X]$ de l'équation

$$\forall\, \gamma \;\in\; \mathbb{R} \;:\;\; b\big(\, \gamma\, X^2 \;+\; X \;-\; \gamma \;,\; (\, X \;+\; a\,)P(X)\, \big) \;=\; 0 \;.$$

6. Déterminer la forme quadratique q associée à la forme bilinéaire b.
7. Déterminer la forme réduite de Sylvester de la forme q, donner sa signature.
8. La forme q est - elle définie positive ?
9. La forme q est - elle dégénérée ?
10. Déterminer une base de $\mathbb{R}_2[X]$ dans laquelle la forme quadratique q s'écrit sous la forme réduite de Sylvester.

Solution de l'exercice 11 Soit $\mathbb{R}_2[X]$ le $\mathbb{R}$ - espace vectoriel des polynômes à une indéterminé à coefficients dans $\mathbb{R}$ de degré au plus deux, et soit l'application

$$b \;:\; \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] \;\longrightarrow\; \mathbb{R} \qquad (\, P, Q\,) \;\longmapsto\; b(\, P, Q\,) \;=\; \int_{-1}^{+1} P(X)\; Q(X)\; dX.$$

1. On montrer que b est une forme bilinéaire symétrique :

a. Symétrique :

$$\forall\ P,\ Q\ \in\ \mathbb{R}_2[X]\ :\ \ b(P,Q)\ =\ b(Q,P)\ .$$

b. Bilinéaire : Vu qu'elle est symétrique il suffit de vérifier qu'elle est linéaire par rapport au premier argument

$$b(\lambda\ P\ +\ \mu\ Q, H)\ =\ \lambda\ b(P,H)\ +\ \mu\ b(Q,H)\ .$$

2. Détermination de la matrice associée à b :

$$\mathcal{M}^{-1}(b)\ =\ \begin{pmatrix} 16/15 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & -16/3 \end{pmatrix}.$$

3. Détermination de l'orthogonale de $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A}^{\perp}\ =\ Vect\ \left\langle\ 5\ X^2\ -\ 1\ \right\rangle\ .$$

4. Déduction : Vu que $\mathcal{A}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$ et que b est définie positive donc non dégénérée, ce qui revient à dire quil y a pas des vecteurs isotropes, alors

$$\mathbb{R}_2[X]\ =\ \mathcal{A}\ \oplus\ \mathcal{A}^{\perp}\ .$$

5. L'existence des solutions : L'equation se traduit par le fait que

$$(X\ +\ a)\ P(x)\ \in\ \mathcal{A}^{\perp}\ ,$$

et donc

$$(X\ +\ a)\ P(x)\ =\ C\ \big(X-\frac{\sqrt{5}}{5}\big)\ \big(X-\frac{\sqrt{5}}{5}\big)\ ,$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \text{Si } a\ &\neq\ \pm\ \frac{\sqrt{5}}{5}\ \Longrightarrow\ P\ \equiv\ 0\ ,\\ \text{Si } a\ &=\ +\ \frac{\sqrt{5}}{5}\ \Longrightarrow\ P(X)\ =\ C\ \big(X-\frac{\sqrt{5}}{5}\big)\ ,\\ \text{Si } a\ &=\ -\ \frac{\sqrt{5}}{5}\ \Longrightarrow\ P(X)\ =\ C\ \big(X+\frac{\sqrt{5}}{5}\big)\ . \end{aligned}$$

6. La forme quadratique q associée à la forme bilinéaire b

$$q(P)\ \ \int_{-1}^{+1}\ P(X)^2\ dX\ ,$$

ce qui donne si on pose $P(X)\ =\ a\ X^2\ +\ b\ X\ +c$ que

$$q(P)\ =\ \frac{2}{5}\,a^2\ +\ \frac{2}{3}\,b^2\ +\ \frac{4}{3}\,a\ c\ +\ 2\,c^2\ .$$

7. La forme réduite de Sylvester :

$$q(P)\ =\ [\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\,a\ +\ \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{3}}\,c\ ]^2\ +\ [\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\,b\ ]^2\ -\ [\ \frac{\sqrt{28}}{3}\,c\ ]^2\ .$$

8. q est définie positive : non, q dégénéré : non.

9. Détermination de la base :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{\sqrt{28}}{3} \end{pmatrix} \implies P^{-1} = \frac{3\sqrt{15}}{2\sqrt{28}} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}\sqrt{28}}{3\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}\sqrt{28}}{3\sqrt{5}} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}\sqrt{10}}{3} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}\sqrt{3}} \end{pmatrix},$$

donc la base vaut

$$v_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}\sqrt{28}}{3\sqrt{3}} \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{2}\sqrt{10}}{3} \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}\sqrt{28}}{3\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

3

Espaces Euclidiens, Espaces Pré-Hilbertiens

Définition 22 (Produit scalaire) *On appelle produit scalaire su un espace vecotiel $\mathbb{E}$ toute forme b bilinèaire symétrique définie positive, et on note*

$$\forall\, x\,,\, y\, \in\, \mathbb{E}\, :\quad b(\, x\,,\, y\,)\, =<\, x\,,\, y\, >\, .$$

Définition 23 (Espaces Euclidiens) *On apple un espace euclidien un couple* $(\, \mathbb{E}\,,\, <\, \cdot\,,\, \cdot\, >\,)$ *d'un* $\mathbb{R}$ *- espace vectoriel* $\mathbb{E}$ *de dimension finie et d'un produit scalire* $<\, \cdot\,,\, \cdot\, >$*.*

Définition 24 (Espaces Pré-Hilbertiens) *On apple un espace Pré-Hilbertien un couple* $(\, \mathbb{E}\,,\, <\, \cdot\,,\, \cdot\, >\,)$ *d'un* $\mathbb{R}$ *- espace vectoriel* $\mathbb{E}$ *de dimension infinie et d'un produit scalire* $<\, \cdot\,,\, \cdot\, >$*.*

Théorème 11 (Existence des bases Orthonormée) *Soit* $(\, \mathbb{E}\,,\, <\, \cdot\,,\, \cdot\, >\,)$ *un espace Euclidien, alors* $\mathbb{E}$ *admet une base orthonormée par rapport au produit scalaire* $<\, \cdot\,,\, \cdot\, >$*.*

3.0.1 Détermination des bases Orthonormées

La détermination des bases orthonormées dans un espace euclidien elle cefait pas deux méthodes la premiére la procédure d'orthogonalisation de Schmidth mais elle a besoin d'une base connu de l'espace $\mathbb{E}$. La deuxième consiste a construire une forme qudratique à partir du produit scalaire car c'est avant tout une forme bilinéaire symétrique donc on considrére la forme quadratique

$$\forall\, x\, \in\, \mathbb{E}\, :\quad \mathcal{Q}(\, x\,)\, =<\, x\,,\, x\, >\, ,$$

on écrit $\mathcal{Q}$ sous la forme

$$\mathcal{Q}(\, x\,)\ =\ \sum_{i,j\,=\,1}^{n}\ a_{ij}\ x_i\ x_j\ ,$$

ensuite en applique la réduction de Sylvester pour avoir

$$\mathcal{Q}(\, x\,)\ =\ \sum_{k\,=\,1}^{n}\ x_k'^2\ ,$$

cela permet d'avoir le changement de variable suivant

$$X'\ =\ \mathcal{A}\, X\ ,$$

alors

$$P\ =\ \mathcal{A}^{-\,1}\ ,$$

c'est la matrice de passage, les vecteurs collones de P représentent les composantes d'une base de $\mathbb{E}$ et cette base elle orthonormée.

Théorème 12 *Soit* $(\mathbb{E}\,,\ <\cdot\,,\cdot>)$ *un espace euclidiens et* $\mathbb{F}$ *un sous espace vectoriel de* $\mathbb{E}$. *Alors*

$$\mathbb{F}^{\perp\perp} = \mathbb{F}\,, \quad \mathbb{E} = \mathbb{F} \oplus \mathbb{F}^{\perp}\,.$$

Définition 25 (Projecteur) *Soit* $(\mathbb{E}\,,\ <\cdot\,,\cdot>)$ *un espace euclidien ou pré-hilbertien, et soit* P *un endomorphisme de* $\mathbb{E}$, *on dit que* P *est un projecteur si*

$$P^2 = P\,,$$

tel que

$$P^2 = P \circ P\,.$$

Définition 26 (Endomorphisme Orthogonal) *Soit* $(\mathbb{E}\,,\ <\cdot\,,\cdot>)$ *un espace euclidien ou pré-hilbertien, et soit* f *un endomorphisme de* $\mathbb{E}$, *on dit que* f *est orthogonal si*

$$\forall\, x\,,\, y \in \mathbb{E}\ :\ < f(x)\,,\, f(y) > = < x\,,\, y >\,.$$

Définition 27 (Projecteur Orthogonal) *Soit* $(\mathbb{E}\,,\ <\cdot\,,\cdot>)$ *un espace euclidien ou pré-hilbertien, et soit* P *un endomorphisme de* $\mathbb{E}$, *on dit que* P *est un projecteur orthogonal si*

$$P^2 = P \quad \text{et} \quad \forall\, x\,,\, y \in \mathbb{E}\ :\ < P(x)\,,\, P(y) > = < x\,,\, y >\,.$$

Proposition 17 *Soit* $(\mathbb{E}\,,\ <\cdot\,,\cdot>)$ *un espace euclidien ou pré-hilbertien, et* P *un projecteur de* $\mathbb{E}$ *alors* P *fait la projection de* $\mathbb{E}$ *sur le sous espace vectoriel* $\mathbb{F}$ *défini par*

$$\mathbb{F} = \operatorname{Im} P\,.$$

Si P *est un projecteur orthogonal alors la projection ce fait d'une maniére orthogonal.*

3.0.2 Exercices

Exercice 12 (Orthogonalité) Soit le $\mathbb{R}$ - espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, et soit le produit scalaire

$$< X\,,\, Y > = 2\,x_1\,y_1 + 2\,x_2\,y_2 + 2\,x_3\,y_3 + y_1\,x_2 + y_1\,x_3 + y_2\,x_3 + x_1\,y_2 + x_1\,y_3 + x_2\,y_3\,.$$

Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ par rapport à ce produit scalaire.

Solution de l'exercice 12

MÉTHODE DE SYLVESTER.
La réduction de sylvester permet d'avoir

$$< X\,,\, X > = 2\,x_1^2 + 2\,x_2^2 + 2\,x_3^2 + 2\,x_1\,x_2 + 2\,x_1\,x_3 + 2\,x_2\,x_3\,,$$

ce qui donne que

$$< X\,,\, X > = (x_1 + x_2)^2 + (x_1 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 = x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2\,,$$

d'ou

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} X\,,$$

d'ou la matrice de passage vaut

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}\,,$$

d'ou la base

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \right\} ,$$

cette base est orthonormée.

MÉTHODE DE SCHMIDTH

Soit la base canonique de $\mathbb{R}^3$

$$\left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} ,$$

on va construire la base orthogonale

$$\{ \varepsilon_1 , \varepsilon_2 , \varepsilon_3 \} ,$$

tel que

$$\varepsilon_1 = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

$$\varepsilon_2 = e_2 + \lambda \varepsilon_1 = \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad < \varepsilon_2 , \varepsilon_1 > = 2 \lambda + 1 = 0 ,$$

ce qui donne

$$\lambda = -1/2 ,$$

et donc

$$\varepsilon_2 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

pour ε_3 on a

$$\varepsilon_3 = e_3 + \mu \varepsilon_1 + \delta \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} \mu - \delta/2 \\ \delta \\ 1 \end{pmatrix} ,$$

avec la contrainte

$$< \varepsilon_3 , \varepsilon_1 > = 2 \mu + 1 = 0 , \quad < \varepsilon_3 , \varepsilon_2 > = 2 \delta = 0 ,$$

ce qui donne

$$\mu = -1/2 , \quad \delta = 0 ,$$

et donc

$$\varepsilon_3 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ,$$

alors la base

$$\left\{ \varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \varepsilon_3 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} ,$$

est orthogonale, pour la normaliser il suffit de diviser chaque vecteur par sa norme à savoir $< \varepsilon_i , \varepsilon_i >^{1/2}$ pour $i = 1 , 2 , 3$.

Exercice 13 (Projecteur et Projecteur Orthogonal) Soit $\mathbb{R}_2[\ X\ ]$ vue comme étant un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel, soit le produit scalaire

$$< p\ ,\ q > \int_{-1}^{+1} p(x)\, q(x)\, dx\ ,$$

et soit l'endomorphisme f de $\mathbb{R}_2[\ X\ ]$ défini par

$$\forall\ p \in \mathbb{R}_2[\ X\ ]\ :\quad f(\ p\ )\ =\ p(\ 0\ )\ +\ p^{(\ 1\ )}(\ 0\ )\ +\ \frac{x^2}{2}\, p^{(\ 2\ )}(\ 0\ )\ .$$

Montrer que f est un projecteur, déterminer le sous espace vectoriel sur lequel on fait la projection et vérifiée s'il s'agit d'un sprojecteur orthogonal ou pas.

Solution de l'exercice 13

1. f est un projecteur. Il suffit de calculer f^2 ce qui donne

$$f^2(\ p\ )\ =\ f\big(\ p(\ 0\ ) + p^{(\ 1\ )}(\ 0\ ) + \frac{x^2}{2}\, p^{(\ 2\ )}(\ 0\ )\big)\ =\ p(\ 0\ ) + p^{(\ 1\ )}(\ 0\ ) + \frac{x^2}{2}\, p^{(\ 2\ )}(\ 0\ )\ =\ f(\ p\ )\ ,$$

donc f est un projecteur.

2. Le sous espace sur lequel on fait la projection. il s'agit de déterminer l'image de f, si on note

$$p(\ x\ )\ =\ a\ +\ b\, x\ +\ c\, x^2\ ,$$

on a

$$f(\ p\ )\ =\ (\ a\ +\ b\ )\ +\ \frac{c}{2}\, x^2\ ,$$

donc

$$\mathrm{Im}\,(\ f\ )\ =\ \Big\{ q\ \in\ \mathbb{R}_2[\ X\ ]\ :\quad q(\ x\ )\ =\ (\ a\ +\ b\ )\ +\ \frac{c}{2}\, x^2 \Big\}\ =\ \mathrm{Vect} < 1\ ,\ X^2 >\ ,$$

alors la projection elle se fait sur le sous espace vectoriel

$$\mathbb{F}\ =\ \mathrm{Vect} < 1\ ,\ X^2 >\ .$$

3. La projection est - elle orthogonale. Il suffit de vérifier si

$$< f(\ p\ )\ ,\ f(\ q\ ) > = < p\ ,\ q >\ ,$$

or pour $p\ =\ q\ =\ x$ on a

$$< f(\ p\ )\ ,\ f(\ q\ ) > =\ 2\ ,\quad < p\ ,\ q > =\ 2/3\ ,$$

donc la projection elle n'est pas orthogonale.

3.1 Endomorphismes Adjoints

Définition 28 (Définition de l'adjoint) *Soit* $(\ \mathbb{E}\ ,\ <\ \cdot\ ,\ \cdot\ >\ )$ *un espace euclidien et soit* f *un endomorphisme de* $\mathbb{E}$*, on dit que* f *admet un adjoint s'il existe un endomorphisme* g *de* $\mathbb{E}$ *tel que*

$$\forall\ x\ ,\ y\ \in\ \mathbb{E}\ :\ \ < f(\ x\ )\ ,\ y > = < x\ ,\ g(\ y\ ) >\ ,$$

et on note

$$f^{\star}\ =\ g\ .$$

Théorème 13 (Existence de l'adgoint) *Soit* $(\mathbb{E} \ , \ < \ \cdot \ , \ \cdot \ >)$ *un espace euclidien et soit* f *un endomorphisme de* $\mathbb{E}$. *Alors* f *admet un unique adjoint* g *et*

$$\mathcal{M}(\ g \ ) \ = \ {}^{t}\mathcal{M}(\ f \ ) \ .$$

Théorème 14 *Soit* $(\mathbb{E} \ , \ < \ \cdot \ , \ \cdot \ >)$ *un espace euclidien et soit* $f, \ g$ *deux endomorphismes de* $\mathbb{E}$,

1. $(\ f \ + \ g \ )^{\star} \ = \ f^{\star} \ + \ g^{\star}$.
2. $(\ f \ \circ \ g \ )^{\star} \ = \ g^{\star} \ \circ \ f^{\star}$.
3. $(\ \lambda \ f \ )^{\star} \ = \ \lambda \ f^{\star}$.

Définition 29 (Auto - Adjoint) *On dit que* f *est auto-adjoint si*

$$f^{\star} \ = \ f \ .$$

Théorème 15 *Tout endomorphisme auto-adjoint et diagonalisable, symétrique et admet des valeurs propres dans* $\mathbb{R}$, *et les sous espaces propres sonr deux à deux orthogonaux.*