RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L' ENSEIGNEMENT SUPÉRIEURE ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
ÉCOLE PRÉPARATOIRE EN SCIENCES ET TECHNIQUES
TLMCEN
Département des Mathématiques

ÉPREUVE FINALE DU DEUXIEM SEMESTRE

Module: ALGÈBRE IV — Responsable: M.HOUBAD
Date: 18 - 05 - 2016 — Année: 2015 - 2016
Coefficient: 3 — Durée: $2h00$

Exercice 1 (05 pts).
Déterminer les valeurs de λ pour que f soit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$

$$\forall X, Y \in \mathbb{R}^3: \quad f(X,Y) = x_1y_1+2x_2y_2+(2+2\lambda^2)x_3y_3+x_1y_2+x_2y_1+x_1y_3+x_3y_1+(1+\lambda)x_2y_3+(1+\lambda)x_3y_2.$$

Exercice 2 (05 pts).
Soit $\mathbb{E} = \mathbb{R}^4$ vu comme un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel et soit le produit scalaire canonique défini par

$$\langle X, Y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4.$$

soit le sous espace vectoriel $\mathbb{F}$ de $\mathbb{E}$ défini par

$$\mathbb{F} = \{X \in \mathbb{E} : \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \quad x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0,\}$$

1. Déterminer une base de $\mathbb{F}$.
2. Déterminer la matrice de Gram associée à la base de $\mathbb{F}$.
3. Déterminer la projection orthogonale sur $\mathbb{F}$.
4. Déterminer la distance entre un vecteur X de $\mathbb{E}$ et le sous espace vectoriel $\mathbb{F}$.

Exercice 3 (05 pts).
Soit $\mathbb{E} = \mathbb{R}^3$ vu comme étant un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel et soit les deux sous espaces

$$\mathbb{F} = \{X \in \mathbb{E} : x - y - z = 0\}, \quad \mathbb{G} = \{X \in \mathbb{E} : \quad x = 0, \quad y - z = 0\},$$

1. Montrer qu'il existe une projection P sur $\mathbb{F}$ dirigée par $\mathbb{G}$ et déduire le $\mathrm{Ker}P$ et $\mathrm{Im}P$.
2. Déterminer l'expression de cette projection.
3. Cette projection est - elle une projection orthogonale (on utilise le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$).

Exercice 4 (05 pts).
Soit la matrice

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $\mathcal{A}$ est diagonalisable.
2. Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ formée par les vecteurs propres de $\mathcal{A}$.
3. Montrer que $(\mathcal{A} - \mathrm{I})^2$ représente la matrice associée à une projection P et donner son expréssion.
4. Déterminer l'espace sur lequel P fait la projection et l'espace avec lequel cette projection est dirigée.
5. Déduire que cette projection est une projection orthogonale.

Indication pour l'exercice 4 :
Si λ est une valeur propre de $\mathcal{A}$ alors $\lambda - 1$ est une valeur propre de $\mathcal{A} - \mathrm{I}$.
"Le sous espace propre de $\mathcal{A}$ associé à la valeur propre λ" = "Le sous espace propre de $\mathcal{A} - \mathrm{I}$ associé à la valeur propres $\lambda - 1$".

BP 165 RP, Bel Horizon, Tlemcen DZ - 13000, Algérie. Tél.+213(0)43 204 135. Fax. +213(0)43 201 824. www.epst-tlemcen.dz
mail to : m.houbad@gmail.com

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L' ENSEIGNEMENT SUPÉRIEURE ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ÉCOLE PRÉPARATOIRE EN SCIENCES ET TECHNIQUES

T L M C E N

Département des Mathématiques

SOLUTION ET BAREME D'ÉPREUVE FINALE DU DEUXIEM SEMESTRE

Module: ALGÈBRE IV — Responsable: M.HOUBAD

Date: 18 - 05 - 2016 — Année: 2015 - 2016

Coefficient: 3 — Durée: $2h00$

Exercice 1 (05 pts).
Déterminer les valeurs de λ pour que f soit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$

$\forall X, Y \in \mathbb{R}^3 :\quad f(X,Y) = x_1y_1+2x_2y_2+(2+2\lambda^2)x_3y_3+x_1y_2+x_2y_1+x_1y_3+x_3y_1+(1+\lambda)x_2y_3+(1+\lambda)x_3y_2.$

$$f(X,Y) = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_iy_j \qquad \longleftarrow \boxed{00.50 \text{ pt}}$$

donc f est une forme bilinéaire de plus

$$\mathcal{M}_{Canonique}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1+\lambda \\ 1 & 1+\lambda & 2+2\lambda^2 \end{pmatrix}, \quad {}^t\mathcal{M}_{Canonique}(f) = \mathcal{M}_{Canonique}(f). \qquad \longleftarrow \boxed{00.50 \text{ pt}}$$

donc f est bilinéaires symétrique.
Il suffit de montrer que la forme bilinéaires symétrique f est définie positive

$$\begin{aligned}
Q(X) = f(X,X) &= x_1^2 + 2x_2^2 + (2+2\lambda^2)x_3^3 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + (2+2\lambda)x_2x_3 && \longleftarrow \boxed{00.50 \text{ pt}} \\
&= [x_1^2 + 2x_1(x_2+x_3)] + 2x_2^2 + (2+2\lambda^2)x_3^3 + (2+2\lambda)x_2x_3 && \longleftarrow \boxed{00.50 \text{ pt}} \\
&= [x_1+x_2+x_3]^2 - (x_2+x_3)^2 + 2x_2^2 + (2+2\lambda^2)x_3^3 + (2+2\lambda)x_2x_3 && \longleftarrow \boxed{00.50 \text{ pt}} \\
&= [x_1+x_2+x_3]^2 + x_2^2 + (1+2\lambda^2)x_3^3 + 2\lambda x_2x_3 && \longleftarrow \boxed{00.50 \text{ pt}} \\
&= [x_1+x_2+x_3]^2 + [x_2^2 + 2x_2(\lambda x_3)] + (1+2\lambda^2)x_3^3 && \longleftarrow \boxed{00.50 \text{ pt}} \\
&= [x_1+x_2+x_3]^2 + [x_2^2 + \lambda x_3]^2 - (\lambda x_3)^2 + (1+2\lambda^2)x_3^3 && \longleftarrow \boxed{00.50 \text{ pt}} \\
&= [x_1+x_2+x_3]^2 + [x_2 + \lambda x_3]^2 + (1+\lambda^2)x_3^3 && \longleftarrow \boxed{00.50 \text{ pt}}
\end{aligned}$$

on a

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} :\quad \mathrm{Sg}(Q) = (3,0)$$

donc f est un produit scalaire pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. $\longleftarrow \boxed{00.50 \text{ pt}}$

Exercice 2 (05 pts).
Soit $\mathbb{E} = \mathbb{R}^4$ vu comme un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel et soit le produit scalaire canonique défini par

$$\langle X, Y \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4.$$

soit le sous espace vectoriel $\mathbb{F}$ de $\mathbb{E}$ défini par

$$\mathbb{F} = \{X \in \mathbb{E} :\quad x_1+x_2+x_3+x_4 = 0, \quad x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0,\}$$

1. Déterminer une base de $\mathbb{F}$.

$$\mathcal{B} = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}. \qquad \longleftarrow \boxed{00.50 \text{ pt}}$$

2. Déterminer la matrice de Gram associée à la base de $\mathbb{F}$.

$$G = \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \langle v_1, v_2 \rangle \\ \langle v_2, v_1 \rangle & \langle v_2, v_2 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}. \qquad \longleftarrow \boxed{01.00 \text{ pt}}$$

3. Déterminer la projection orthogonale sur $\mathbb{F}$.

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = G^{-1} \begin{pmatrix} \langle X, v_1 \rangle \\ \langle X, v_2 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{x_1 - x_3}{2} \\ \dfrac{x_2 - x_4}{2} \end{pmatrix} \qquad \longleftarrow \boxed{01.50 \text{ pt}}$$

$$P(X) = \alpha v_1 + \beta v_2 = \begin{pmatrix} \dfrac{x_1 - x_3}{2} \\ \dfrac{x_2 - x_4}{2} \\ -\dfrac{x_1 - x_3}{2} \\ -\dfrac{x_2 - x_4}{2} \end{pmatrix}. \qquad \longleftarrow \boxed{01.00 \text{ pt}}$$

4. Déterminer la distance entre un vecteur X de $\mathbb{E}$ et le sous espace vectoriel $\mathbb{F}$.

$$d(X, \mathbb{F}) = d(X, P(X)) = \sqrt{\| X \|^2 - \| P(X) \|^2} = \sqrt{\frac{(x_1 + x_3)^2}{2} + \frac{(x_2 + x_4)^2}{2}} \qquad \longleftarrow \boxed{01.00 \text{ pt}}$$

Exercice 3 (05 pts)**.**
Soit $\mathbb{E} = \mathbb{R}^3$ vu comme étant un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel et soit les deux sous espaces

$$\mathbb{F} = \{X \in \mathbb{E} : x - y - z = 0\}, \quad \mathbb{G} = \{X \in \mathbb{E} : \quad x = 0, \quad y - z = 0\},$$

1. Montrer qu'il existe une projection P sur $\mathbb{F}$ dirigée par $\mathbb{G}$ et déduire le $\operatorname{Ker} P$ et $\operatorname{Im} P$.
   (a) On montre qu'il existe une projection sur $\mathbb{F}$ dirigée par $\mathbb{G}$.
      i. Détermination d'une base de $\mathbb{F}$ et d'une base de $\mathbb{G}$.

$$\mathbb{F} = \operatorname{Vect}\left\langle v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle. \qquad \longleftarrow \boxed{00.50 \text{ pt}}$$

$$\mathbb{G} = \operatorname{Vect}\left\langle v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle. \qquad \longleftarrow \boxed{00.50 \text{ pt}}$$

      ii. On Montre que $\mathbb{E} = \mathbb{F} \oplus \mathbb{G}$.

$$\det \left(v_1 \middle| v_2 \middle| v_2 \right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -2 \neq 0$$

donc $\mathbb{E} = \mathbb{F} \oplus \mathbb{G}$. $\longleftarrow \boxed{00.50 \text{ pt}}$

iii. Conclusion.
vu que $\mathbb{E} = \mathbb{F} \oplus \mathbb{G}$ donc il existe une projection sur $\mathbb{F}$ dirigée par $\mathbb{G}$. $\longleftarrow$ $\boxed{00.50 \text{ pt}}$

(b) Déduction du $\operatorname{Ker} P$ et $\operatorname{Im} P$.

$$\operatorname{Ker} P = \mathbb{G}, \quad \operatorname{Im} P = \mathbb{F}. \quad \longleftarrow \boxed{00.50 \text{ pt}}$$

2. Déterminer l'expression de cette projection.
Vu que $\mathbb{E} = \mathbb{F} \oplus \mathbb{G}$ donc pour $X \in \mathbb{E}$ on a :

$$X = \underbrace{\alpha v_1 + \beta v_2}_{= X_1 \in \mathbb{F}} + \underbrace{\gamma v_3}_{= X_2 \in \mathbb{G}}. \quad \longleftarrow \boxed{00.50 \text{ pt}}$$

ce qui donne le système suivant

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \alpha + \beta & = & x_1 \\ \alpha + \gamma & = & x_2 \\ \beta + \gamma & = & x_3 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} \alpha & = & \dfrac{x_1 + x_2 - x_3}{2} \\ \\ \beta & = & \dfrac{x_1 - x_2 + x_3}{2} \end{array} \right. \quad \longleftarrow \boxed{00.50 \text{ pt}}$$

et finalement l'expression de la projection P est

$$P(X) = X_1 = \alpha v_1 + \beta v_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ \\ \dfrac{x_1 + x_2 - x_3}{2} \\ \\ \dfrac{x_1 - x_2 + x_3}{2} \end{pmatrix} \quad \longleftarrow \boxed{00.50 \text{ pt}}$$

3. Cette projection est - elle une projection orthogonale (on utilise le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$).
Vu que $< v_1, v_3 >= 1 \neq 0$ donc $\mathbb{F} \not\perp \mathbb{G}$ et donc P n'est pas une projection orthogonale. $\longleftarrow$ $\boxed{01.00 \text{ pt}}$

Exercice 4 (05 pts).
Soit la matrice

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $\mathcal{A}$ est diagonalisable.
La matrice $\mathcal{A}$ est symétrique à coefficient à coefficient $\mathbb{R}$ donc elle est diagonalisable. $\longleftarrow$ $\boxed{00.50 \text{ pt}}$

2. Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ formée par les vecteurs propres de $\mathcal{A}$.

(a) Détermination des valeurs propres de $\mathcal{A}$.

$$P_{\mathcal{A}}(\lambda) = -\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2). \quad \longleftarrow \boxed{00.75 \text{ pt}}$$

(b) Détermination des vecteurs propres de $\mathcal{A}$.

$$\mathbb{E}_0 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad \mathbb{E}_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad \mathbb{E}_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle. \quad \longleftarrow \boxed{00.75 \text{ pt}}$$

(c) Détermination d'une base orthonormée formée par les vecteurs propres de $\mathcal{A}$. On utilise le fait que les sous espaces propres d'une matrice réelle symétrique sont deux à deux orthogonaux alors il suffit de normaliser les vecteurs propres de $\mathcal{A}$, ce qui donne

$$\mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}. \quad \longleftarrow \boxed{00.50 \text{ pt}}$$

3. Montrer que $(\mathcal{A}-\mathrm{I})^2$ représente la matrice associée à une projection P et donner son expréssion.
   (a) On montre que $(\mathcal{A}-\mathrm{I})^2$ représente la matrice associée à une projection.

$$\mathcal{C} = (\mathcal{A}-\mathrm{I})^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \longleftarrow \boxed{00.50 \text{ pt}}$$

   le calcule donne

$$\mathcal{C}^2 = \mathcal{C}. \qquad \longleftarrow \boxed{00.50 \text{ pt}}$$

   donc $\mathcal{C} = (\mathcal{A}-\mathrm{I})^2$ représente la matrice associée à une projection P.
   (b) L'expression de P. $\longleftarrow \boxed{00.50 \text{ pt}}$

$$P(X) = \mathcal{C}X = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$$

4. Déterminer l'espace sur lequel P fait la projection et l'espace avec lequel cette projection est dirigée.
   (a) L'espace sur lequel on fait la projection : $\longleftarrow \boxed{00.50 \text{ pt}}$

$$P(X) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   donc

$$\mathrm{Im}(P) = \mathrm{Vect}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

   (b) L'espace avec lequel on dirige la projection : $\longleftarrow \boxed{00.50 \text{ pt}}$

$$X \in \mathrm{Ker}(P) \Longrightarrow P(X) = 0 \Longrightarrow x = z = 0 \Longrightarrow X = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   donc

$$\mathrm{Ker}(P) = \mathrm{Vect}\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

5. Déduire que cette projection est une projection orthogonale. $\longleftarrow \boxed{00.50 \text{ pt}}$
   Vu que $\mathrm{Ker}(P) \perp \mathrm{Im}(P)$ donc la projection est orthogonale.

On utilisant l'indication :
On a $\mathrm{Sp}(\mathcal{A}) = \{0, 1, 2\}$ donc $\mathrm{Sp}((\mathcal{A}-\mathrm{I})^2) = \left\{(-1)^2, 0, 1\right\}$ et donc

$$\mathrm{Ker}((\mathcal{A}-\mathrm{I})^2) = \mathbb{E}_0^{(\mathcal{A}-\mathrm{I})^2} = \mathbb{E}_1^{\mathcal{A}}, \quad \mathbb{E}_1^{(\mathcal{A}-\mathrm{I})^2} = \mathbb{E}_0^{\mathcal{A}} \oplus \mathbb{E}_2^{\mathcal{A}}.$$

On utilise le fait que les sous espaces propres de $\mathcal{A}$ sont deux à deux orthogonaux donc

$$\mathbb{E}_0^{(\mathcal{A}-\mathrm{I})^2} \perp \mathbb{E}_1^{(\mathcal{A}-\mathrm{I})^2} = \mathbb{E}_0^{\mathcal{A}} \oplus \mathbb{E}_2^{\mathcal{A}}$$

on utilise le fait qu'on a une projection orthogonale donc

$$\mathrm{Ker}((\mathcal{A}-\mathrm{I})^2) = \mathbb{E}_0^{(\mathcal{A}-\mathrm{I})^2} = \mathbb{E}_1^{\mathcal{A}}, \quad \mathrm{Im}((\mathcal{A}-\mathrm{I})^2) = \mathbb{E}_1^{(\mathcal{A}-\mathrm{I})^2} = \mathbb{E}_0^{\mathcal{A}} \oplus \mathbb{E}_2^{\mathcal{A}}.$$

BP 165 RP, Bel Horizon, Tlemcen DZ - 13000, Algérie. Tél.+213(0)43 204 135. Fax. +213(0)43 201 824. www.epst-tlemcen.dz
mail to : m.houbad@gmail.com