

R É P U B L I Q U E A L G É R I E N N E D É M O C R A T I Q U E E T P O P U L A I R E
M I N I S T È R E D E L' E N S E I G N E M E N T S U P É R I E U R E E T D E L A R E C H E R C H E S C I E N T I F I Q U E
É C O L E P R E P A R A T O I R E E N S C I E N C E S E T T E C H N I Q U E S

T L M C E N

Département des Mathématiques

DEVOIR SURVEILLÉ DU PREMIER SEMESTRE

Module: ALGÈBRE III

Date: 11 - 11 - 2015

Coefficient: 3

Responsable: M.HOUBAD

Année: 2015 - 2016

Durée: 2h00

Exercice 1 (04 pts).

Soit $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admet une seule valeur propre telle que

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Montrer que si

$$\exists i, j \in \{1, \dots, n\}, \quad i \neq j : \quad a_{ij} \neq 0,$$

alors \mathcal{A} est une matrice trigonalisable.

Exercice 2 (08 pts).

Soit la suite définie par

$$X_{n+1} = \mathcal{A}X_n, \quad X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 6 & 2 \\ -2 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le terme général de la suite X_n . (05 pts)
2. Calculer la somme suivante (03 pts)

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k.$$

Exercice 3 (08 pts).

Soit l'équation différentielle suivante

$$\forall t \in \mathbb{R} : \quad f^{(3)}(t) - 6f^{(2)}(t) + 12f^{(1)}(t) - 8f(t) = 0$$

1. Écrire l'équation précédente sous la forme (01 pts)

$$\frac{d}{dt}X = \mathcal{A}X, \quad \mathcal{A} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \quad X = \begin{pmatrix} f^{(2)} \\ f^{(1)} \\ f \end{pmatrix}.$$

2. Calculer le polynôme caractéristique de \mathcal{A} et vérifier que 2 est une racine. (01 pts)
3. Montrer que \mathcal{A} est une matrice trigonalisable. (01 pts)
4. Déterminer sa matrice réduite et une matrice de passage correspondante. (02 pts)
5. Résoudre le système (02 pts)

$$\frac{d}{dt}X = \mathcal{A}X$$

6. Déterminer la fonction f . (01 pt)

R É P U B L I Q U E A L G É R I E N N E D É M O C R A T I Q U E E T P O P U L A I R E
 MINISTÈRE DE L' ENSEIGNEMENT SUPÉRIEURE ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
 ÉCOLE PRÉPARATOIRE EN SCIENCES ET TECHNIQUES

T L M C E N

Département des Mathématiques

CORRIGÉ ET BARÈME DU DEVOIR SURVEILLÉ DU PREMIER SEMESTRE

Module: ALGÈBRE III

Responsable: M.HOUBAD

Date: 11 - 11 - 2015

Année: 2015 - 2016

Coefficient: 3

Durée: 2h00

Exercice 1 (04 pts).

Soit $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admet une seule valeur propre telle que

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

On suppose que

$$\exists i, j \in \{1, \dots, n\}, \quad i \neq j : \quad a_{ij} \neq 0,$$

et que \mathcal{A} est une matrice diagonalisable, donc sa matrice réduite est de la forme

$$\mathcal{A}' = \lambda_0 \mathbf{I},$$

le calcul donne

$$\mathcal{A} = P \mathcal{A}' P^{-1} = \lambda_0 \mathbf{I}$$

donc

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, \quad i \neq j : \quad a_{ij} = 0,$$

ce qui est contradictoire avec l'hypothèse et donc \mathcal{A} est trigonalisable.

Exercice 2 (08 pts).

Soit la suite définie par

$$X_{n+1} = \mathcal{A}X_n, \quad X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 6 & 2 \\ -2 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le terme général de la suite X_n . (05 pts)

01pt

(a) Polynôme caractéristique

$$P_{\mathcal{A}} = \det(\mathcal{A} - \lambda \mathbf{I}) = (4 - \lambda)^2(8 - \lambda)$$

01pt

(b) Les vecteurs propres

$$\mathbb{E}_4 = \text{Vect} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad \mathbb{E}_8 = \text{Vect} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

01pt

(c) matrice réduite et matrice de passage

$$\mathcal{A}' = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

01pt

(d) calcule de \mathcal{A}^n

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}^n &= P \mathcal{A}^n P^{-1} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4^n & 0 & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 8^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4^n & 4^n & 0 \\ 4^n & 4^n & 8^n \\ 0 & 4^n & 8^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 * 4^n & 0 & 0 \\ 2 * 4^n - 8^n & 8^n & 8^n \\ 4^n - 8^n & -4^n + 8^n & 4^n + 8^n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2^{2n} & 0 & 0 \\ 2^{2n} - 2^{3n-1} & 2^{3n-1} & 2^{3n-1} \\ 2^{2n-1} - 2^{3n-1} & -2^{2n-1} + 2^{3n-1} & 2^{2n-1} + 2^{3n-1} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

01pt

(e) le terme générale

$$\begin{aligned}
X_n = \mathcal{A} X_{n-1} &\implies X_n = \mathcal{A}^n X_0 \\
&\implies \begin{cases} x_n = 2^{2n} x_0 \\ y_n = (2^{2n} - 2^{3n-1}) x_0 + 2^{3n-1} y_0 + 2^{3n-1} z_0 \\ z_n = (2^{2n-1} - 2^{3n-1}) x_0 + (-2^{2n-1} + 2^{3n-1}) y_0 + (2^{2n-1} + 2^{3n-1}) z_0 \end{cases}
\end{aligned}$$

03pts

2. Calculer la somme suivante

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_n &= \sum_{k=1}^n X_k \\
&= \sum_{k=1}^n \mathcal{A}^k X_0 \\
&= \sum_{k=1}^n P \mathcal{A}^k P^{-1} X_0 \\
&= P \left(\sum_{k=1}^n \mathcal{A}^k \right) P^{-1} X_0 \\
&= P \left(\sum_{k=1}^n \begin{pmatrix} 4^k & 0 & 0 \\ 0 & 4^k & 0 \\ 0 & 0 & 8^k \end{pmatrix} \right) P^{-1} X_0 \\
&= P \begin{pmatrix} \frac{4^{n+1}-1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4^{n+1}-1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8^{n+1}-1}{7} \end{pmatrix} P^{-1} X_0 \\
&= \begin{pmatrix} \frac{4^{n+1}-1}{3} & \frac{4^{n+1}-1}{3} & 0 \\ \frac{4^{n+1}-1}{3} & \frac{4^{n+1}-1}{3} & \frac{8^{n+1}-1}{7} \\ 0 & \frac{4^{n+1}-1}{3} & \frac{8^{n+1}-1}{7} \end{pmatrix} P^{-1} X_0 \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \frac{4^{n+1}-1}{3} & 0 & 0 \\ 2 \frac{4^{n+1}-1}{3} - \frac{8^{n+1}-1}{7} & \frac{8^{n+1}-1}{7} & \frac{8^{n+1}-1}{7} \\ \frac{4^{n+1}-1}{3} - \frac{8^{n+1}-1}{7} & -\frac{4^{n+1}-1}{3} + \frac{8^{n+1}-1}{7} & \frac{4^{n+1}-1}{3} + \frac{8^{n+1}-1}{7} \end{pmatrix} X_0
\end{aligned}$$

Exercice 3 (08 pts).

Soit l'équation différentielle suivante

$$\forall t \in \mathbb{R} : f^{(3)}(t) - 6f^{(2)}(t) + 12f^{(1)}(t) - 8f(t) = 0$$

01pt

1. Écrire l'équation précédente sous la forme

$$\frac{d}{dt}X = \mathcal{A}X \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} 6 & -12 & 8 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} f^{(2)} \\ f^{(1)} \\ f \end{pmatrix}.$$

01pt

2. Calculer le polynôme caractéristique de \mathcal{A} et vérifier que 2 est une racine.

$$P_{\mathcal{A}}(\lambda) = \det(\mathcal{A} - \lambda I) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8, \quad P_{\mathcal{A}}(2) = 0, \quad P_{\mathcal{A}}(\lambda) = (2 - \lambda)^3.$$

01pt

3. Montrer que \mathcal{A} est une matrice trigonalisable.

Détermination des vecteurs propres

$$(\mathcal{A} - 2I)V = 0 \implies \begin{cases} x = 4z \\ y = 2z \end{cases} \implies V = z \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc

$$\mathbb{E}_2 = \text{Vect} \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

le polynôme caractéristique est scindé et

$$\dim \mathbb{E}_2 = 1 \neq 3 = \text{mul}(2),$$

donc la matrice \mathcal{A} est trigonalisable.

4. Déterminer sa matrice réduite et une matrice de passage correspondante.

$$\mathcal{A}' = \begin{pmatrix} 2 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad P = \left(v_1 \mid v_2 \mid v_3 \right)$$

le système à résoudre

$$\begin{cases} \mathcal{A}v_1 = 2v_1 \\ \mathcal{A}v_2 = av_1 + 2v_2 \\ \mathcal{A}v_3 = bv_1 + cv_2 + 2v_3 \end{cases}$$

0.5pt

- (a) Détermination de v_1 . Il suffit de prendre

$$v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

01pt

- (b) Détermination de v_2 . On prend $a = 1$ et on résoud le système

$$(\mathcal{A} - 2I)v_2 = v_1$$

ce qui donne que

$$v_2 = \begin{pmatrix} 4z + 4 \\ 2z + 1 \\ z \end{pmatrix}.$$

on prend $z = 0$ on a

$$v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

01pt

(c) Détermination de v_3 . Il s'agit de résoudre le système

$$(\mathcal{A} - 2I)v_3 = bv_1 + cv_2$$

ce qui donne que

$$v_2 = \begin{pmatrix} 4z + 4b + c \\ 2z + b \\ z \end{pmatrix}.$$

on prend $z = 0$ on a

$$v_2 = \begin{pmatrix} 4b + c \\ b \\ 0 \end{pmatrix}.$$

pour que $\{v_1, v_2, v_3\}$ forme une base il faut et il suffit que

$$\det P \neq 0 \implies c \neq 0$$

On choisie $c = 1$ et $b = 0$ ce qui donne que

$$\mathcal{A}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

02pt

5. Résoudre le système

$$\frac{d}{dt}X = \mathcal{A}X$$

(a) Résolution de

$$\frac{d}{dt}Y = \mathcal{A}'Y$$

ce qui donne

$$Y = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}c_3t^2 + c_2t + c_1 \\ c_3t + c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

(b) Détermination de X

$$X = PY \implies X = \begin{pmatrix} 2c_3t^2 + (4c_2 + 2c_3)t + 4c_1 + 2c_2 + c_3 \\ 2c_3t^2 + (4c_2 + c_3)t + 4c_1 + c_2 \\ \frac{1}{2}c_3t^2 + c_2t + c_1 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

01pt

6. Déterminer la fonction f .

$$f(t) = \left(\frac{1}{2}c_3t^2 + c_2t + c_1 \right) e^{2t}.$$

R É P U B L I Q U E A L G É R I E N N E D É M O C R A T I Q U E E T P O P U L A I R E
M I N I S T È R E D E L' E N S E I G N E M E N T S U P É R I E U R E E T D E L A R E C H E R C H E S C I E N T I F I Q U E
É C O L E P R É P A R A T O I R E E N S C I E N C E S E T T E C H N I Q U E S

T L M C E N

Département des Mathématiques

DEVOIR SURVEILLE DU DEUXIEME SEMESTRE

Module: ALGÈBRE IV

Responsable: M.HOUBAD

Date: 16 - 03 - 2016

Année: 2015 - 2016

Coefficient: 3

Durée: 2h00

Exercice 1 (04 pts).

Soit \mathbb{E} un \mathbb{R} - espace vectoriel, b une forme bilinéaire symétrique définie sur \mathbb{E} , \mathbb{F} et \mathbb{G} deux sous espaces vectoriels de \mathbb{E} . Montrer que

$$(\mathbb{F} + \mathbb{G})^\perp \subset (\mathbb{F} \cap \mathbb{G})^\perp.$$

Exercice 2 (04 pts).

Soit $\mathbb{E} = \mathbb{R}_2[X]$ un \mathbb{R} - espace vectoriel et soit l'application b définie par

$$\forall p, q \in \mathbb{E} : b(p, q) = p(1)q(1) - p(-1)q(-1).$$

1. Montrer que b est une forme bilinéaire et déterminer la matrice associée à b dans la base canonique de \mathbb{E} .
2. Montrer que Q définie par

$$\forall p \in \mathbb{E} : Q(p) = b(p, p),$$

est une forme quadratique

3. Déterminer la réduction de Sylvester de Q ainsi qu'une base correspondante à la réduction.

Exercice 3 (04 pts).

Soit $\mathbb{E} = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ un \mathbb{R} - espace vectoriel et soit la forme quadratique Q définie par

$$\forall \mathcal{A} \in \mathbb{E} : Q(\mathcal{A}) = \det(\mathcal{A}).$$

Déterminer l'orthogonal du sous espace vectoriel

$$\mathbb{F} = \{ \mathcal{A} \in \mathbb{E} : {}^t\mathcal{A} = -\mathcal{A} \}.$$

Exercice 4 (08 pts).

Soit \mathbb{R}^4 un \mathbb{R} - espace vectoriel et soit l'application Q de \mathbb{R}^4 dans \mathbb{R} définie par

$$Q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + 3x_2x_3 + 3x_2x_4 + 3x_3x_4.$$

1. Montrer que Q est une forme quadratique sur \mathbb{R}^4 et déterminer sa forme polaire
2. Déterminer la matrice associée à Q dans la base canonique de \mathbb{R}^4 .
3. Déterminer la matrice associée à la forme quadratique Q dans la base

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

4. Déterminer le noyau de la forme quadratique Q .
5. Déterminer la réduction de Sylvester de la forme quadratique Q et la signature de Q .
6. En utilisant la signature de Q étudier le caractère de Q d'être définie positive, d'être dégénérée.
7. Déterminer une base orthogonale de \mathbb{R}^4 par rapport à la forme polaire associée à Q .

R É P U B L I Q U E A L G É R I E N N E D É M O C R A T I Q U E E T P O P U L A I R E
 MINISTÈRE DE L' ENSEIGNEMENT SUPÉRIEURE ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
 ÉCOLE PRÉPARATOIRE EN SCIENCES ET TECHNIQUES

T L M C E N

Département des Mathématiques

SOLUTION ET BARAME DU DEVOIR SURVEILLE DU DEUXIEM SEMESTRE

Module: ALGÈBRE IV

Responsable: M.HOUBAD

Date: 16 - 03 - 2016

Année: 2015 - 2016

Coefficient: 3

Durée: 2h00

Exercice 1 (04 pts).

Soit \mathbb{E} un \mathbb{R} - espace vectoriel, b une forme bilinéaire symétrique définie sur \mathbb{E} , \mathbb{F} et \mathbb{G} deux sous espaces vectoriels de \mathbb{E} . On montrer que

$$(\mathbb{F} + \mathbb{G})^\perp \subset (\mathbb{F} \cap \mathbb{G})^\perp .$$

$$y \in (\mathbb{F} + \mathbb{G})^\perp \implies \forall x \in \mathbb{F} + \mathbb{G} : b(x, y) = 0 \quad \leftarrow \boxed{01,00 \text{ pt}}$$

$$\implies \forall x_1 \in \mathbb{F}, \quad \forall x_2 \in \mathbb{G} : b(\underbrace{x_1 + x_2}_{=x}, y) = 0 \quad \leftarrow \boxed{00,50 \text{ pt}}$$

$$(1) \implies \forall x_1 \in \mathbb{F}, \quad \forall x_2 \in \mathbb{G} : b(x_1, y) + b(x_2, y) = 0 \quad \leftarrow \boxed{00,50 \text{ pt}}$$

\mathbb{F} est un sous espace vectoriel alors on peut prendre $x_1 = 0$ et on utilise le fait que $b(0, y) = 0$ alors la relation (1) ce transforme en $\leftarrow \boxed{00,50 \text{ pt}}$

$$(2) \quad \forall x_2 \in \mathbb{G} : b(x_2, y) = 0 \quad \leftarrow \boxed{00,50 \text{ pt}}$$

alors la relation (1) donne

$$(3) \quad \forall x_1 \in \mathbb{F} : b(x_1, y) = 0 \quad \leftarrow \boxed{00,50 \text{ pt}}$$

on utilise (2) et (3) on obtient que

$$\forall x \in \mathbb{F} \cap \mathbb{G} : b(x, y) = 0 \implies y \in (\mathbb{F} \cap \mathbb{G})^\perp . \quad \leftarrow \boxed{00,50 \text{ pt}}$$

Exercice 2 (04 pts).

Soit $\mathbb{E} = \mathbb{R}_2[X]$ un \mathbb{R} - espace vectoriel et soit l'application b définie par

$$\forall p, q \in \mathbb{E} : b(p, q) = p(1)q(1) - p(-1)q(-1).$$

1. On montrer que b est une forme bilinéaire et on détermine la matrice associée à b dans la base canonique de \mathbb{E} .

(a) b est bilinéaire

$$\left. \begin{aligned} b(\lambda p_1 + \mu p_2, q) &= (\lambda p_1(1) + \mu p_2(1)) q(1) \\ &\quad - (\lambda p_1(-1) + \mu p_2(-1)) q(-1). \\ &= \lambda (p_1(1) q(1) - p_1(-1) q(-1)) \\ &\quad + \mu (p_2(1) q(1) - p_2(-1) q(-1)) \\ &= \lambda b(p_1, q) + \mu b(p_2, q) \end{aligned} \right\} \quad \leftarrow \boxed{00,25 \text{ pt}}$$

de plus

$$\left. \begin{aligned} b(p, q) &= p(1)q(1) - p(-1)q(-1) \\ &= q(1)p(1) - q(-1)p(-1) \\ &= b(q, p) \end{aligned} \right\} \quad \leftarrow \boxed{00,25 \text{ pt}}$$

alors b est linéaire par à la première variable et elle est symétrique donc elle est bilinéaire. $\leftarrow \boxed{00,25 \text{ pt}}$

(b) La matrice associée dans la base canonique de \mathbb{E} . Soit

$$p(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2, \quad q(x) = b_1 + b_2 x + b_3 x^2,$$

donc

$$b(p, q) = 2a_1 b_2 + 2a_2 b_1 + 2a_2 b_3 + 2a_3 b_2.$$

alors

$$\mathcal{M}_{\text{Canonique}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \leftarrow \boxed{00,25 \text{ pt}}$$

2. On montrer que $\mathcal{Q}(p) = b(p, p)$ est une forme quadratique. Vu que b est bilinéaire symétrique donc c'est une forme polaire et donc \mathcal{Q} est une forme quadratique. $\leftarrow \boxed{00,25 \text{ pt}}$

3. Détermination de la réduction de Sylvester de \mathcal{Q} ainsi qu'une base correspondante à la réduction.

(a) La réduction de Sylvester.

$$\mathcal{Q}(p) = b(p, p) = 4a_1 a_2 + 4a_2 a_3 \quad \leftarrow \boxed{00,25 \text{ pt}}$$

on choisie le terme $4a_1 a_2$ $\leftarrow \boxed{00,25 \text{ pt}}$

On calcule les dérivées partielles

$$\partial_{a_1} \mathcal{Q}(p) = 4a_2 = \varphi_1, \quad \partial_{a_2} \mathcal{Q}(p) = 4a_1 + 4a_3 = \varphi_2 \quad \leftarrow \boxed{00,25 \text{ pt}}$$

On détermine le terme correctif

$$T_c = \mathcal{Q}(p) - \frac{1}{4} \varphi_1 \varphi_2 = 0 \quad \leftarrow \boxed{00,25 \text{ pt}}$$

On réduit \mathcal{Q} à la somme des carrées

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(p) &= \frac{1}{4} \varphi_1 \varphi_2 \\ &= \frac{1}{16} (\varphi_1 + \varphi_2)^2 - \frac{1}{16} (\varphi_1 - \varphi_2)^2 \quad \leftarrow \boxed{00,25 \text{ pt}} \\ &= \underbrace{(a_1 + a_2 + a_3)^2}_{= a_1'^2} - \underbrace{(a_1 - a_2 + a_3)^2}_{= a_2'^2} \quad \leftarrow \boxed{00,25 \text{ pt}} \\ &= a_1'^2 - a_2'^2. \end{aligned}$$

(b) La base correspondante.

$$\begin{cases} a_1' = a_1 + a_2 + a_3 \\ a_2' = a_1 - a_2 + a_3 \\ a_3' = \alpha a_1 + \beta a_2 + \gamma a_3 \end{cases} \implies \begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \\ a_3' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}}_{= P^{-1}} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}. \quad \leftarrow \boxed{00,25 \text{ pt}}$$

$$\det P^{-1} = 2(\alpha - \gamma) \neq 0 \iff \alpha \neq \gamma \quad \leftarrow \boxed{00,25 \text{ pt}}$$

il suffit de prendre

$$\alpha = 1, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0 \quad \leftarrow \boxed{00,25 \text{ pt}}$$

donc

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & -1 \end{pmatrix} \quad \leftarrow \boxed{00,25 \text{ pt}}$$

et donc la base vaut

$$\mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2, -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2, 1 - x^2 \right\}. \quad \leftarrow \boxed{00,25 \text{ pt}}$$

Exercice 3 (04 pts).

Soit $\mathbb{E} = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ un \mathbb{R} - espace vectoriel et soit la forme quadratique \mathcal{Q} définie par

$$\forall \mathcal{A} \in \mathbb{E} : \quad \mathcal{Q}(\mathcal{A}) = \det(\mathcal{A}).$$

Déterminer l'orthogonal du sous espace vectoriel

$$\mathbb{F} = \{ \mathcal{A} \in \mathbb{E} : \quad {}^t\mathcal{A} = -\mathcal{A} \}.$$

1. Détermination de la forme polaire

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} \\ \mathcal{S}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) &= \frac{1}{2} [\mathcal{Q}(\mathcal{A} + \mathcal{B}) - \mathcal{Q}(\mathcal{A}) - \mathcal{Q}(\mathcal{B})] \\ &= \frac{1}{2} [\det(\mathcal{A} + \mathcal{B}) - \det(\mathcal{A}) - \det(\mathcal{B})] \end{aligned} \quad \leftarrow \boxed{00,75 \text{ pt}}$$

2. Détermination de \mathbb{F} (l'expression des éléments ou une base)

$$\mathcal{A} \in \mathbb{F} \implies \mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}, \quad {}^t\mathcal{A} = -\mathcal{A} \implies \mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & a_2 \\ -a_2 & 0 \end{pmatrix} = a_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \leftarrow \boxed{00,50 \text{ pt}}$$

donc

$$\mathbb{F} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \leftarrow \boxed{00,50 \text{ pt}}$$

3. Détermination de l'orthogonal

$$\begin{aligned} \mathcal{B} \in \mathbb{F}^\perp &\implies \mathcal{B} \perp \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \leftarrow \boxed{00,50 \text{ pt}} \\ &\implies \mathcal{S} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \mathcal{B} \right) = 0 \quad \leftarrow \boxed{00,50 \text{ pt}} \\ &\implies \det \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \mathcal{B} \right) - \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \det(\mathcal{B}) = 0 \\ &\implies \det \begin{pmatrix} b_1 & b_2 + 1 \\ b_3 - 1 & b_4 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} = 0 \quad \leftarrow \boxed{00,25 \text{ pt}} \\ &\implies b_2 = b_3 \quad \leftarrow \boxed{00,50 \text{ pt}} \\ &\implies \mathcal{B} = \begin{pmatrix} b_1 & b_3 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} = b_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \leftarrow \boxed{00,25 \text{ pt}} \\ \mathbb{F}^\perp &= \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \leftarrow \boxed{00,25 \text{ pt}} \end{aligned}$$

Exercice 4 (08 pts).

Soit \mathbb{R}^4 un \mathbb{R} - espace vectoriel et soit l'application \mathcal{Q} de \mathbb{R}^4 dans \mathbb{R} définie par

$$\mathcal{Q}(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + 3x_2x_3 + 3x_2x_4 + 3x_3x_4.$$

1. Montrer que \mathcal{Q} est une forme quadratique sur \mathbb{R}^4 et déterminer sa forme polaire.

- (a) \mathcal{Q} est une forme quadratique. \mathcal{Q} est un polynôme homogène de degré deux donc \mathcal{Q} est une forme quadratique $\leftarrow \boxed{01,00 \text{ pt}}$

(b) La forme polaire

$$\begin{aligned}
 \mathcal{S}(x, y) &= \frac{1}{2} [\mathcal{Q}(x + y) - \mathcal{Q}(x) - \mathcal{Q}(y)] \quad \leftarrow \boxed{00,50 \text{ pt}} \\
 &= x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4 + \\
 &\quad x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_1 y_3 + x_3 y_1 + \\
 &\quad x_1 y_4 + x_4 y_1 + \frac{3}{2} x_2 y_3 + \frac{3}{2} x_3 y_2 + \\
 &\quad \frac{3}{2} x_2 y_4 + \frac{3}{2} x_4 y_2 + \frac{3}{2} x_3 y_4 + \frac{3}{2} x_4 y_3 . \quad \leftarrow \boxed{00,75 \text{ pt}}
 \end{aligned}$$

2. Déterminer la matrice associée à \mathcal{Q} dans la base canonique de \mathbb{R}^4 .

$$\mathcal{M}_{\text{Canonique}}(\mathcal{Q}) = \mathcal{M}_{\text{Canonique}}(\mathcal{S}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \quad \leftarrow \boxed{00,75 \text{ pt}}$$

3. Déterminer la matrice associée à la forme quadratique \mathcal{Q} dans la base

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Détermination de la matrice de passage

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \leftarrow \boxed{00,25 \text{ pt}}$$

Détermination de la matrice associée dans la nouvelle base

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{Q}) &= {}^t P \mathcal{M}_{\text{Canonique}} P \quad \leftarrow \boxed{00,50 \text{ pt}} \\
 &= \begin{pmatrix} 19 & 14 & 14 & 15 \\ 14 & 10 & 21/2 & 11 \\ 14 & 21/2 & 10 & 11 \\ 15 & 11 & 11 & 12 \end{pmatrix} \quad \leftarrow \boxed{00,25 \text{ pt}}
 \end{aligned}$$

4. Déterminer le noyau de la forme quadratique \mathcal{Q} .

$$y \in \mathcal{N}(\mathcal{Q}) \implies y \in \text{Ker}(\mathcal{M}(\mathcal{Q})) \implies \mathcal{M}(\mathcal{Q}) y = 0 \implies y = 0 \quad \leftarrow \boxed{00,50 \text{ pt}}$$

5. Déterminer la réduction de Sylvester de la forme quadratique \mathcal{Q} et la signature de \mathcal{Q} .

$$\mathcal{Q}(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + 3x_2x_3 + 3x_2x_4 + 3x_3x_4.$$

On applique la méthode de Gauss et on choisie choisie le terme x_1 . $\leftarrow \boxed{00,25 \text{ pt}}$

$$\mathcal{Q}(x) = x_1^2 + 2x_1(x_2 + x_3 + x_4) + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 3x_2x_3 + 3x_2x_4 + 3x_3x_4. \quad \leftarrow \boxed{00,25 \text{ pt}}$$

on applique la formule du binôme de Newton

$$\mathcal{Q}(x) = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 - (x_2 + x_3 + x_4)^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 3x_2x_3 + 3x_2x_4 + 3x_3x_4. \quad \leftarrow 00,25 \text{ pt}$$

On détermine le terme correctif

$$\mathcal{Q}(x) = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 + \underbrace{x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4}_{=Tc}. \quad \leftarrow 00,25 \text{ pt}$$

On applique la méthode des dérivées partielles au niveau du terme Tc

On choisit le terme x_2x_3 $\leftarrow 00,25 \text{ pt}$

$$\partial_{x_2}Tc = x_3 + x_4 = \varphi_1, \quad \partial_{x_3}Tc = x_2 + x_4 = \varphi_2 \quad \leftarrow 00,25 \text{ pt}$$

$$Tc' = Tc - \varphi_1\varphi_2 = -x_4^2 \quad \leftarrow 00,25 \text{ pt}$$

$$Tc = \varphi_1\varphi_2 - x_4^2 = \frac{1}{4}(\varphi_1 + \varphi_2)^2 - \frac{1}{4}(\varphi_1 - \varphi_2)^2 - x_4^2 \quad \leftarrow 00,25 \text{ pt}$$

$$Tc = \left(\frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4\right)^2 - \left(\frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3\right)^2 - x_4^2 \quad \leftarrow 00,25 \text{ pt}$$

$$\mathcal{Q}(x) = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 + \left(\frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4\right)^2 - \left(\frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3\right)^2 - x_4^2 \quad \leftarrow 00,25 \text{ pt}$$

6. En utilisant la signature de \mathcal{Q} étudier le caractère de \mathcal{Q} d'être définie positive, d'être dégénérée.

$$\text{Sg}(\mathcal{Q}) = (2, 2) \quad \leftarrow 00,25 \text{ pt}$$

donc \mathcal{Q} elle n'est pas définie positive $\leftarrow 00,25 \text{ pt}$ et elle est non dégénérée. $\leftarrow 00,25 \text{ pt}$

7. Déterminer une base orthogonale de \mathbb{R}^4 par rapport à la forme polaire associée à \mathcal{Q} .

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ x'_2 = \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 \\ x'_3 = \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 \\ x'_4 = x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x'_1 - 2x'_2 \\ x_2 = x'_2 + x'_3 - \frac{1}{2}x'_4 \\ x_3 = x'_2 - x'_3 - \frac{1}{2}x'_4 \\ x_4 = x'_4 \end{cases} \Rightarrow P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}. \quad \leftarrow 00,25 \text{ pt}$$