RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTÈRE DE L' ENSEIGNEMENT SUPÉRIEURE ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

# ÉCOLE PREPARATOIRE EN SCIENCES ET TECHNIQUES

T L M C E N

Département des Mathématiques

DEVOIR SURVEILLÉ DU PREMIER SEMESTRE

| | |
|---|---|
| Module: ALGÈBRE III | Responsable: M.HOUBAD |
| Date: 18 - 11 - 2014 | Année: 2014 - 2015 |
| Coefficient: 3 | Durée: $2h00$ |

**Exercice 1** ( 05 pts ).

Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{R}$ – espace vectoriel de dimension finie et $f,\ g \in \mathrm{End}(\mathbb{E})$ deux endomorphismes diagonalisables ont les mêmes vecteurs propres vérifiant

$$f \circ g + \mathrm{Id} = f\,,$$

on note par

$$\forall k \in \mathbb{N}^* : \quad f^k = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{k-fois}\,.$$

1. Montrer que
$$\forall\, k \in \mathbb{N}^* : \quad \mathrm{Sp}(\,f^k\,) = \left\{\,\lambda^k / \quad \lambda \in \mathrm{Sp}(\,f\,)\,\right\}.$$
2. Déterminer les valeur propres de $f$ en fonctions des valeurs propres de $g$, et déduire que
$$1 \notin \mathrm{Sp}(\,g\,)\,, \quad 0 \notin \mathrm{Sp}(\,f\,)\,.$$
3. Montrer par récurrence que
$$\forall\, n \in \mathbb{N}^* : \quad f^n = \left(\sum_{k=1}^{n} f^k\right) \circ g + \mathrm{Id}.$$
4. Déduire que “$\mathrm{Id} - g$” est inversible et que
$$\forall\, n \in \mathbb{N}\,, \quad n \geq 2 : \quad f^n = \left(\sum_{k=1}^{n-1} f^k\right) \circ g \circ (\,\mathrm{Id} - g\,)^{-1} + (\,\mathrm{Id} - g\,)^{-1}\,.$$

**Exercice 2** ( 05 pts ).

Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^* \quad n \geq 3 : \quad u_n - u_{n-2} = 0\,, \quad u_2 = u_1 = 1\,. \tag{1}$$

1. Déterminer les deux vecteurs $X_n, X_{n-1}$, la matrice carrée $\mathcal{A}$ et les deux constantes $a, b \in \mathbb{R}$ tel que la relation (1) ce transforme en
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 3 : \quad X_n = \mathcal{A}\, X_{n-1}\,, \quad X_2 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$
2. Déterminer le terme générale de la suite $(X_n)_{n \geq 2}$.
3. Utiliser le résultat de la question précédente pour déterminer le terme générale de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

**Exercice 3** ( 10 pts )**.**

Soit $\mathbb{R}_2[\, X \,]$ le $\mathbb{R}$ – espace vectoriel des polynômes de degré au plus deux à coefficients dans $\mathbb{R}$ à variable dans $\mathbb{R}$, et soit l'application linéaire $f$ de $\mathbb{R}_2[\, X \,]$ définie par

$$\forall\, \mathcal{P} \in \mathbb{R}_2[\, X \,] : \quad f(\, \mathcal{P}\,) = \mathcal{Q}\,,$$

tel que

$$\forall\, x \in \mathbb{R} : \quad \mathcal{Q}(\, x\,) = (2 - x - x^2)\,\mathcal{P}(0) + (3x + x^2)\,\mathcal{P}^{(1)}(0) + \frac{1}{2}(x + 3x^2)\,\mathcal{P}^{(2)}(0)\,.$$

1. Montrer que $f$ représente un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[\, X \,]$.
2. Déterminer $\mathcal{A}$ la matrice associée à $f$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[\, X \,]$.
3. Montrer que la matrice $\mathcal{A}$ est diagonalisable.
4. Déterminer la matrice réduite diagonale de $\mathcal{A}$ et une matrice de passage correspondante.
5. Déterminer une base correspondante à la diagonalisation de $f$.
6. Soit $\mathcal{Z}(\, t\,)$ une fonction de $\mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{R}^3$, résoudre le système
$$\frac{d}{dt}\mathcal{Z}(\, t\,) = \mathcal{A}\,\mathcal{Z}(\, t\,)\,.$$
7. Dans la suite soit $a(\, t\,)$, $b(\, t\,)$ et $c(\, t\,)$ trois fonctions inconnus dans $C^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$ et on note par
$$\mathcal{P}(t, x) = a(\, t\,)\, x^2 + b(\, t\,)\, x + c(\, t\,)\,,$$
déduire la solution de l'équation différentielle
$$\forall\, t, x \in \mathbb{R} : \quad \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{P}(t, x) = f\big(\mathcal{P}(t, x)\big)\,.$$

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L' ENSEIGNEMENT SUPÉRIEURE ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ÉCOLE PREPARATOIRE EN SCIENCES ET TECHNIQUES

T L M C E N

Département des Mathématiques

# CORRIGÉ ET BARÈME DU DEVOIR SURVEILLÉ DU PREMIER SEMESTRE

Module: ALGÈBRE III | Responsable: M.HOUBAD

Date: 18 - 11 - 2014 | Année: 2014 - 2015

Coefficient: 3 | Durée: $2h00$

**Exercice 1** ( 05 pts ).

Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{R}$ – espace vectoriel de dimension finie et $f, g \in \text{End}(\mathbb{E})$ deux endomorphismes diagonalisables ont les mêmes vecteurs propres vérifiant

$$f \circ g + \text{Id} = f,$$

on note par

$$\forall k \in \mathbb{N}^* : \quad f^k = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{k-fois}.$$

01 pt

1. On montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}^* : \quad \text{Sp}(f^k) = \left\{ \lambda^k / \quad \lambda \in \text{Sp}(f) \right\}.$$

On suppose que $\lambda \in \text{Sp}(f)$ et $v$ un vecteur propre correspondant, on va montrer par récurrence que

$$\forall k \in \mathbb{N}^* : \quad f^k(v) = \lambda^k v,$$

(a) Pour $k = 1$ : On a $f(v) = \lambda v$ ce qui est vrai.

(b) On suppose que $f^k(v) = \lambda^k v$ pour certain rang $k$ donc

$$f^{k+1}(v) = f(f^k(v)) = f(\lambda^k v) = \lambda^k f(v) = \lambda^k(\lambda v) = \lambda^{k+1} v,$$

(c) Conclusion

$$\forall k \in \mathbb{N}^* : \quad \text{Sp}(f^k) = \left\{ \lambda^k / \quad \lambda \in \text{Sp}(f) \right\}.$$

01 pt

2. Détermination des valeurs propres de $f$ en fonctions des valeurs propres de $g$. Vu que $f$ et $g$ sont diagonalisable et ils ont les même vecteurs propres donc il existe une base e $\mathbb{E}$ formée par les vecteurs propres, on la note $\mathcal{B}$, ce qui donne que

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \ddots & & \\ & \lambda_i & \\ & & \ddots \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} \ddots & & \\ & \mu_i & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} f \circ g + \text{Id} = f &\implies f \circ (\text{Id} - g) = \text{Id}, \\ &\implies \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f \circ (\text{Id} - g)) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\text{Id}) \\ &\implies \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)\,\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\text{Id} - g) = \text{I} \\ &\implies \forall i \in \mathbb{N}_n^* : \quad \lambda_i(1 - \mu_i) = 1 \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure que

$$0 \notin \text{Sp}(f), \quad 1 \notin \text{Sp}(g),$$

et que

$$\forall i \in \mathbb{N}_n^* : \quad \lambda_i = \frac{1}{1 - \mu_i}.$$

`01 pt` 3. On montrer par récurrence que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^* : \quad f^n = \left( \sum_{k=1}^{n} f^k \right) \circ g + \mathrm{Id}.$$

Pour $n = 1$ on a

$$f = f \circ g + \mathrm{Id}. \tag{\#}$$

On suppose que l'égalité est vrai jusqu'à un certain ordre $n$

$$\begin{aligned}
f^{n+1} = f(f^n) &= f\left( \left( \sum_{k=1}^{n} f^k \right) \circ g + \mathrm{Id} \right) \\
&= \left( \sum_{k=1}^{n} f^{k+1} \right) \circ g + f \\
&= \left( \sum_{k=2}^{n+1} f^k \right) \circ g + f \\
& \quad \downarrow \text{Changement d'indice} \qquad \downarrow \text{La relation (\#)} \\
&= \left( \sum_{k=2}^{n+1} f^k \right) \circ g + (f \circ g + \mathrm{Id}) \\
&= \left( \sum_{k=1}^{n+1} f^k \right) \circ g + \mathrm{Id}
\end{aligned}$$

`02 pt` 4. On déduire que "$\mathrm{Id} - g$" est inversible et que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2 : \quad f^n = \left( \sum_{k=1}^{n-1} f^k \right) \circ g \circ (\mathrm{Id} - g)^{-1} + (\mathrm{Id} - g)^{-1}.$$

L'application "$\mathrm{Id} - g$" est inversible car

$$1 \notin \mathrm{Sp}(g) \Longrightarrow 0 \notin \mathrm{Sp}(\mathrm{Id} - g) \Longrightarrow \det(\mathrm{Id} - g) \neq 0,$$

De plus on sais que

$$\begin{aligned}
f^n = \left( \sum_{k=1}^{n} f^k \right) \circ g + \mathrm{Id} &\Longrightarrow f^n = f^n \circ g + \left( \sum_{k=1}^{n-1} f^k \right) \circ g + \mathrm{Id} \\
&\Longrightarrow f^n \circ (\mathrm{Id} + g) = \left( \sum_{k=1}^{n-1} f^k \right) \circ g + \mathrm{Id} \\
&\Longrightarrow f^n = \left( \sum_{k=1}^{n-1} f^k \right) \circ g \circ (\mathrm{Id} + g)^{-1} + (\mathrm{Id} + g)^{-1}
\end{aligned}$$

**Exercice 2** ( 05 pts ).

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^* \quad n \geq 3 : \quad u_n - u_{n-2} = 0, \quad u_2 = u_1 = 1. \tag{1}$$

01 pt

1. Détermination des deux vecteurs $X_n, X_{n-1}$, la matrice carrée $\mathcal{A}$ et les deux constantes $a, b \in \mathbb{R}$ tel que la relation (1) ce transforme en

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 3 : \quad X_n = \mathcal{A}\, X_{n-1}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Il suffit de prendre

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Détermination du terme générale de la suite $(X_n)_{n\geq 2}$.

$$X_n = \mathcal{A}X_{n-1} \Longrightarrow X_n = \mathcal{A}^{n-2}X_2,$$

0.75 pt

Le polynôme caractéristique de $\mathcal{A}$

$$P_{\mathcal{A}}(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 1),$$

donc le polynôme caractéristique il est scindé et admet que des racines simples donc $\mathcal{A}$ est diagonalisable.

0.75 pt

Les sous espaces propres

$$\mathbb{E}_1 = \text{Vect}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad \mathbb{E}_{-1} = \text{Vect}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

0.75 pt

Matrice réduite et matrice de passage

$$\mathcal{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

01 pt

Calcule de $\mathcal{A}^{n-2}$

$$\mathcal{A}^{n-2} = P\mathcal{A}'^{n-2}P^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1+(-1)^n}{2} & \dfrac{1-(-1)^n}{2} \\ \dfrac{1-(-1)^n}{2} & \dfrac{1+(-1)^n}{2} \end{pmatrix}.$$

0.75 pt

3. Détermination du terme générale de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

$$\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = \mathcal{A}^{n-2} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \end{pmatrix} \Longrightarrow u_n = 1.$$

**Exercice 3** ( 10 pts ).

Soit $\mathbb{R}_2[\,X\,]$ le $\mathbb{R}$ – espace vectoriel des polynômes de degré au plus deux à coefficients dans $\mathbb{R}$ à variable dans $\mathbb{R}$, et soit l'application linéaire $f$ de $\mathbb{R}_2[\,X\,]$ définie par

$$\forall\, \mathcal{P} \in \mathbb{R}_2[\,X\,] : \quad f(\,\mathcal{P}\,) = \mathcal{Q}\,,$$

tel que

$$\forall\, x \in \mathbb{R} : \quad \mathcal{Q}(\,x\,) = (2 - x - x^2)\,\mathcal{P}(0) + (3x + x^2)\,\mathcal{P}^{(1)}(0) + \frac{1}{2}(x + 3x^2)\,\mathcal{P}^{(2)}(0)\,.$$

1.0 pt

1. $f$ représente un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[\,X\,]$ Car

$$\forall\, \mathcal{P} \in \mathbb{R}_2[X] : \quad f(\mathcal{P}) \in \mathbb{R}_2[X].$$

1.0 pt

2. Détermination de $\mathcal{A}$ la matrice associée à $f$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[\,X\,]$.

$$\mathcal{M}_{\{1,X,X^2\}}(\,f\,) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

2.0 pt

3. La matrice $\mathcal{A}$ est diagonalisable.
   (a) Le polynôme caractéristique de $\mathcal{A}$.

$$P_{\mathcal{A}}(\lambda) = \det(\mathcal{A} - \lambda \mathrm{I}) = -(\lambda - 2)^2(\lambda - 4).$$

   (b) Les sous espaces caractéristiques de $\mathcal{A}$.

$$\mathbb{E}_2 = \mathrm{Vect}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad \mathbb{E}_4 = \mathrm{Vect}\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

   (c) La conlusion.
   – $P_{\mathcal{A}}$ est scindé.
   – $\dim \mathbb{E}_2 = 2 = \mathrm{mul}(2)$, $\dim \mathbb{E}_4 = 1 = \mathrm{mul}(4)$.
   En conclusion $\mathcal{A}$ est diagonalisable.

1.0 pt

4. Déterminer la matrice réduite diagonale de $\mathcal{A}$ et une matrice de passage correspondante.

$$\mathcal{A}' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1.0 pt

5. Détermination d'une base correspondante à la diagonalisation de $f$.

$$\left\{1 + X, 1 + X^2, X + X^2\right\}.$$

6. Résolution du système

$$\frac{d}{dt}\mathcal{Z}(\,t\,) = \mathcal{A}\,\mathcal{Z}(\,t\,).$$

1.0 pt

   (a) Résolution du système réduit.

$$\frac{d}{dt}Y = \mathcal{A}'Y \Longrightarrow Y = \begin{pmatrix} c_1 e^{2t} \\ c_2 e^{2t} \\ c_3 e^{4t} \end{pmatrix}.$$

1.0 pt

   (b) Détermination de $\mathcal{Z}(t)$.

$$\mathcal{Z}(t) = PY \Longrightarrow \mathcal{Z}(t) = \begin{pmatrix} (c_1 + c_2)e^{2t} \\ c_1 e^{2t} + c_3 e^{4t} \\ c_2 e^{2t} + c_3 e^{4t} \end{pmatrix}.$$

2.0 pt

7. On considère $a(t)$, $b(t)$ et $c(t)$ trois fonctions inconnus dans $C^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$ et on note par

$$\mathcal{P}(t,x) = a(t)\,x^2 + b(t)\,x + c(t),$$

On va déduire la solution de l'équation différentielle

$$\forall\, t,x \in \mathbb{R} : \quad \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{P}(t,x) = f\big(\mathcal{P}(t,x)\big).$$

Dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ on a

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{P}(t,x)\right) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)\,\mathcal{M}_{\mathcal{B}}\big(\mathcal{P}(t,x)\big)$$

donc

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{M}_{\mathcal{B}}\big(\mathcal{P}(t,x)\big) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)\,\mathcal{M}_{\mathcal{B}}\big(\mathcal{P}(t,x)\big)$$

on a

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}\big(\mathcal{P}(t,x)\big) = \begin{pmatrix} c(t) \\ b(t) \\ a(t) \end{pmatrix},$$

on utilise la question précédent on en déduit que

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}\big(\mathcal{P}(t,x)\big) = \begin{pmatrix} c(t) \\ b(t) \\ a(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (c_1 + c_2)\,e^{2t} \\ c_1\,e^{2t} + c_3\,e^{4t} \\ c_2\,e^{2t} + c_3\,e^{4t} \end{pmatrix}.$$

donc

$$\mathcal{P}(t,x) = \left(c_2\,e^{2t} + c_3\,e^{4t}\right) x^2 + \left(c_1\,e^{2t} + c_3\,e^{4t}\right) x + (c_1 + c_2)\,e^{2t}.$$

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L' ENSEIGNEMENT SUPÉRIEURE ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
ÉCOLE PRÉPARATOIRE EN SCIENCES ET TECHNIQUES
TLMCEN
Département des Mathématiques

# DEVOIR SURVEILLE DU DEUXIÈME SEMESTRE

Module: ALGÈBRE III — Responsable: M.HOUBAD

Date: 17 - 03 - 2015 — Année: 2014 - 2015

Coefficient: 3 — Durée: $2h00$

**Exercice 1** ( 04 pts ).

Soit $\mathbb{E} = \mathbb{R}^3$ vu comme étant un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel et soit la forme quadratique $\mathcal{Q}$ définie par

$$\forall X \in \mathbb{E} : \quad \mathcal{Q}(X) = x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3 .$$

1. Déterminer le cône isotrope de la forme quadratique $\mathcal{Q}$.
2. Déterminer un sous espace vectoriel isotrope de dimension deux.

**Exercice 2** ( 06 pts ).

Soit $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vu comme étant un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel et soit l'application définie par

$$\forall \mathcal{A} \in \mathbb{E} : \quad \mathcal{Q}(\mathcal{A}) = \det \mathcal{A} .$$

On donne la base canonique de $\mathbb{E}$ définie par

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

1. Montrer que $\mathcal{Q}$ représente une forme quadratique sur $\mathbb{E}$ et déterminer $\mathcal{S}$ la forme polaire associée à $\mathcal{Q}$.
2. Déduire la matrice associée à la forme polaire $\mathcal{S}$ dans la base $\mathcal{B}$.
3. Soit le sous espace vectoriel $\mathbb{F}$ de $\mathbb{E}$ défini par

$$\mathbb{F} = \left\{ \mathcal{A} \in \mathbb{E} : \quad {}^t\mathcal{A} = -\mathcal{A} \right\},$$

déterminer l'orthogonale de $\mathbb{F}$ par rapport à la forme quadratique $\mathcal{Q}$.

**Exercice 3** ( 10 pts ).

Soit $\mathbb{E} = \mathbb{R}_2[X]$ vu comme étant un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel, et soi l'application $B$ définie par

$$\forall p, q \in \mathbb{E} : \quad B(p,q) = p(0)q^{(1)}(0) - p(1)q^{(1)}(1) .$$

1. Montrer que $B$ représente une forme bilinéaire.
2. Montrer que l'application définie par

$$\forall p \in \mathbb{E} : \quad \mathcal{Q}(p) = B(p,p),$$

représente une forme quadratique sur $\mathbb{E}$.
3. Déterminer la réduction de Sylvestre de la forme quadratique $\mathcal{Q}$.
4. Déterminer le cône isotrope de $\mathcal{Q}$.
5. Dans le cas ou l'espace $\mathbb{E}$ admet des sous espaces vectoriels isotrope déterminer l'un d'eux.
6. On utilisant la signature, vérifiée si la forme si la forme quadratique $\mathcal{Q}$ est définie positive et si elle est dégénérée.
7. Déterminer une base orthogonale de l'espace $\mathbb{E}$ par rapport à la forme quadratique $\mathcal{Q}$.

BP 165 RP, Bel Horizon, Tlemcen DZ - 13000, Algérie. Tél.+213(0)43 204 135. Fax. +213(0)43 201 824. www.epst-tlemcen.dz
mail to : m.houbad@gmail.com

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l' Enseignement Supérieure et de la Recherche Scientifique

# École Préparatoire en Sciences et Techniques

T l m c e n

Département des Mathématiques

DEVOIR SURVEILLE DU DEUXIÈME SEMESTRE
SOLUTION ET BARÈME

| | |
|---|---|
| Module: Algèbre III | Responsable: M.HOUBAD |
| Date: 17 - 03 - 2015 | Année: 2014 - 2015 |
| Coefficient: 3 | Durée: $2h00$ |

**Exercice 1** ( 04 pts ).

Soit $\mathbb{E} = \mathbb{R}^3$ vu comme étant un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel et soit la forme quadratique $\mathcal{Q}$ définie par

$$\forall X \in \mathbb{E} : \quad \mathcal{Q}(X) = x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3 .$$

$\boxed{\texttt{02 pts}}$

1. Détermination du cône isotrope de la forme quadratique $\mathcal{Q}$.
On applique la réduction de Gauss à la forme quadratique $\mathcal{Q}$ on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}(X) &= x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3 \\
&= x_1^2 + 2x_1(x_2 + x_3) - x_2^2 - x_3^2 - 2x_2x_3 \\
&= (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_2x_3 \\
&= (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_2 + x_3)^2
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
X \in \mathcal{I}(\mathcal{Q}) &\Longrightarrow \mathcal{Q}(X) = 0 \\
&\Longrightarrow (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_2 + x_3)^2 = 0 \\
&\Longrightarrow (x_1 + x_2 + x_3)^2 = 2(x_2 + x_3)^2 \\
&\Longrightarrow x_1 + x_2 + x_3 = \pm\sqrt{2}(x_2 + x_3) \\
&\Longrightarrow x_1 = \pm\sqrt{2}(x_2 + x_3) - x_2 - x_3 \\
&\Longrightarrow x_1 = \left\{\begin{array}{l} (\sqrt{2} - 1)x_2 + (\sqrt{2} - 1)x_3 \\ \text{où} \\ -(\sqrt{2} + 1)x_2 - (\sqrt{2} + 1)x_3 \end{array}\right. \\
&\Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} X \in \text{Vect}\left\langle \begin{pmatrix} \sqrt{2} - 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{2} - 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \\ \text{où} \\ X \in \text{Vect}\left\langle \begin{pmatrix} -\sqrt{2} - 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sqrt{2} - 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \end{array}\right.
\end{aligned}$$

donc

$$\mathcal{I}(\mathcal{Q}) = \text{Vect}\left\langle \begin{pmatrix} \sqrt{2} - 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{2} - 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \bigcup \text{Vect}\left\langle \begin{pmatrix} -\sqrt{2} - 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sqrt{2} - 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

02 pts

2. Détermination d'un sous espace vectoriel isotrope de dimension deux.
   On peut prendre par exemple

$$\mathbb{F} = \text{Vect}\left\langle \begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

**Exercice 2** ( 06 pts )**.**

Soit $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vu comme étant un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel et soit l'application définie par

$$\forall \mathcal{A} \in \mathbb{E} : \quad \mathcal{Q}(\mathcal{A}) = \det \mathcal{A}.$$

On donne la base canonique de $\mathbb{E}$ définie par

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

1. On montre que $\mathcal{Q}$ représente une forme quadratique sur $\mathbb{E}$ et on détermine $\mathcal{S}$ la forme polaire associée à $\mathcal{Q}$.

01 pt

   (a) $\mathcal{Q}$ est quadratique
   Soit la matrice

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

   le calcul fournit

$$\mathcal{Q}(\mathcal{A}) = \det \mathcal{A} = a\,d - b\,c.$$

   ce qui est un polynôme homogène de degré deux en $a$, $b$, $c$ et $d$ donc $\mathcal{Q}$ est une forme quadratique sur l'espace vectoriel $\mathbb{E}$.

01 pt

   (b) Détermination de la forme polaire associée.
   Soit les deux matrices

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix},$$

   le calcul fournit

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\mathcal{A},\mathcal{B}) &= \frac{1}{2}\left[\mathcal{Q}(\mathcal{A}+\mathcal{B}) - \mathcal{Q}(\mathcal{A}) - \mathcal{Q}(\mathcal{B})\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\det(\mathcal{A}+\mathcal{B}) - \det(\mathcal{A}) - \det(\mathcal{B})\right] \\ &= \frac{1}{2}a\,d' + \frac{1}{2}a'\,d - \frac{1}{2}b\,c' - \frac{1}{2}b'\,c. \end{aligned}$$

01 pt

2. La matrice associée à la forme polaire $\mathcal{S}$ dans la base $\mathcal{B}$.

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{S}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

03 pts

3. Déterminer l'orthogonale de $\mathbb{F}$ par rapport à la forme quadratique $\mathcal{Q}$ avec

$$\mathbb{F} = \left\{\mathcal{A} \in \mathbb{E} : \quad {}^t\mathcal{A} = -\mathcal{A}\right\}.$$

   Soit la matrice

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

dans un premier temps on a

$$\begin{aligned}\mathcal{A}\in\mathbb{F} &\Longrightarrow\ {}^t\mathcal{A} = -\mathcal{A}\\ &\Longrightarrow\ a=-a,\quad b=-c,\quad d=-d\\ &\Longrightarrow\ \mathcal{A}=\begin{pmatrix}0 & b\\ -b & 0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

et donc

$$\mathbb{F} = \mathrm{Vect}\left\langle \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\right\rangle.$$

Soit la matrice

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix}a' & b'\\ c' & d'\end{pmatrix},$$

donc

$$\begin{aligned}\mathcal{B}\in\mathbb{F}^{\perp} &\Longleftrightarrow\ \mathcal{B}\perp\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\\ &\Longleftrightarrow\ \mathcal{S}\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\mathcal{B}\right)=0\\ &\Longleftrightarrow\ -\frac{1}{2}c'+\frac{1}{2}d'=0\\ &\Longleftrightarrow\ c'=d'\\ &\Longleftrightarrow\ \mathcal{B}=\begin{pmatrix}a' & b'\\ d' & d'\end{pmatrix}\end{aligned}$$

finalement

$$\mathbb{F}^{\perp} = \mathrm{Vect}\left\langle \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right\rangle.$$

**Exercice 3** ( 10 pts ).

Soit $\mathbb{E}=\mathbb{R}_2[X]$ vu comme étant un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel, et soi l'application $B$ définie par

$$\forall\, p,\, q\in\mathbb{E}:\quad B(p,q) = p(0)\,q^{(1)}(0) - p(1)\,q^{(1)}(1).$$

01 pt

1. On montre que $B$ représente une forme bilinéaire.
   Il suffit de monter que

$$\begin{aligned}&\forall p_1,\, p_2,\, q\in\mathbb{E},\quad \forall\lambda,\,\mu\in\mathbb{R}:\quad B(\lambda\, p_1+\mu\, p_2\,,\, q) = \lambda\, B(p_1,q)+\mu B(p_2,q),\\ &\forall\, p,\, q\in\mathbb{E}:\quad B(p,q)=B(q,p).\end{aligned}$$

02 pts

2. On montre que l'application $\mathcal{Q}$ représente une forme quadratique sur $\mathbb{E}$ tel que

$$\forall\, p\in\mathbb{E}:\quad \mathcal{Q}(p) = B(p,p),$$

   La forme suivante

$$\mathcal{S}(p,q) = \frac{1}{2}\left[\mathcal{Q}(p+q)-\mathcal{Q}(p)-\mathcal{Q}(q)\right] = \frac{B(p,q)+B(q,p)}{2}.$$

   est bilinéaire symétrique donc $\mathcal{Q}$ est une forme quadratique.

02 pts

3. Détermination de la réduction de Sylvestre de la forme quadratique $\mathcal{Q}$.
   on a

$$\mathcal{Q}(p) = p(0)\,p^{(1)}(0) - p(1)\,p^{(1)}(1).$$

   on pose

$$p(x) = a\,x^2 + b\,x + c$$

donc

$$\begin{array}{rcl}
\mathcal{Q}(p) & = & -2a^2 - b^2 - 3ab - 2ac \\
& = & -\left[b^2 + 2b\left(\frac{3}{2}a\right)\right] - 2a^2 - 2ac \\
& = & -\left(b + \frac{3}{2}a\right)^2 + \frac{9}{4}a^2 - 2a^2 - 2ac \\
& = & -\left(b + \frac{3}{2}a\right)^2 + \frac{1}{4}a^2 - 2ac \\
& = & -\left(b + \frac{3}{2}a\right)^2 + \frac{1}{4}\left[a^2 - 2a\,(4c)\right] \\
& = & -\left(b + \frac{3}{2}a\right)^2 + \frac{1}{4}\left[(a - 4c)^2 - 16c^2\right] \\
& = & -\left(b + \frac{3}{2}a\right)^2 + \frac{1}{4}(a - 4c)^2 - 4c^2 \\
& = & \left(\frac{1}{2}a - 2c\right)^2 - \left(b + \frac{3}{2}a\right)^2 - (2c)^2 \\
& = & a'^2 - b'^2 - c'^2
\end{array}$$

tel que

$$\left\{\begin{array}{rcl}
a' & = & \frac{1}{2}a - 2c \\
b' & = & b + \frac{3}{2}a \\
c' & = & 2c
\end{array}\right.$$

`01 pt`

4. Détermination du cône isotrope de $\mathcal{Q}$.

$$\begin{array}{rcl}
p \in \mathcal{I}(\mathcal{Q}) & \Longrightarrow & \mathcal{Q}(p) = 0 \\
& \Longrightarrow & -2a^2 - b^2 - 3ab - 2ac = 0 \\
& \Longrightarrow & 2ac = -2a^2 - b^2 - 3ab \\
& \Longrightarrow & \left\{\begin{array}{lll} c = -2a - \frac{b^2}{a} - 3b & if & a \neq 0 \\ b = 0, \quad c \in \mathbb{R} & if & a = 0 \end{array}\right. \\
& \Longrightarrow & \left\{\begin{array}{lll} p(x) = ax^2 + bx - 2a - \frac{b^2}{a} - 3b & if & a \neq 0 \\ p(x) = c & if & a = 0 \end{array}\right.
\end{array}$$

donc

$$\mathcal{I}(\mathcal{Q}) = \left\{p \in \mathbb{E} : \quad p(x) = ax^2 + bx - 2a - \frac{b^2}{a} - 3b, \quad a \neq 0\right\} \bigcup \mathrm{Vect}\langle 1 \rangle .$$

`01 pt`

5. Dans le cas ou l'espace $\mathbb{E}$ admet des sous espaces vectoriels isotrope déterminer l'un d'eux.
Vu que $\mathcal{I}(\mathcal{Q}) \neq \{0\}$ donc $\mathbb{E}$ admet des sous espaces vectoriels isotropes, un exemple de l'un d'eux est

$$\mathbb{F} = \mathrm{Vect}\langle 1 \rangle .$$

`01 pt`

6. On utilisant la signature, on vérifier si la forme si la forme quadratique $\mathcal{Q}$ est définie positive et si elle est dégénérée.
La signature de $\mathcal{Q}$ vaut $(1, 2)$ donc $\mathcal{Q}$ elle n'est pas définie positive et elle est non dégénérée.

$\boxed{\texttt{02 pts}}$ 7. Détermination d'une base orthogonale de l'espace $\mathbb{E}$ par rapport à la forme quadratique $\mathcal{Q}$.
On a

$$\left\{\begin{array}{lll} a' & = & \dfrac{1}{2}a - 2c \\ b' & = & b + \dfrac{3}{2}a \\ c' & = & 2c \end{array}\right. \Longrightarrow \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -2 \\ 3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{\mathcal{A}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

ce qui donne que la matrice de passage est définie par

$$P = \mathcal{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

et donc la base

$$\mathcal{B} = \left\{ 2x^2 + 3x \, , \, x \, , \, 2x^2 + 3x + \frac{1}{2} \right\},$$

est une base orthogonale de $\mathbb{E}$ par rapport à la forme quadratique $\mathcal{Q}$.

BP 165 RP, Bel Horizon, Tlemcen DZ - 13000, Algérie. Tél.+213(0)43 204 135. Fax. +213(0)43 201 824. www.epst-tlemcen.dz
mail to : m.houbad@gmail.com