RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L' ENSEIGNEMENT SUPÉRIEURE ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ÉCOLE PRÉPARATOIRE EN SCIENCES ET TECHNIQUES

T L M C E N

Département des Mathématiques

ÉPREUVE FINALE DU PREMIER SEMESTRE

Module: ALGÈBRE III	Responsable: M.HOUBAD
Date: 27 - 01 - 2015	Année: 2014 - 2015
Coefficient: 3	Durée: $2h00$

Exercice 1 (06 pts).

Soit $\mathbb{E} = C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ vu comme étant un $\mathbb{R}$ – espace vectoriel, déterminer les valeurs porpres et les vecteurs propres de l'endomorphisme Φ défini par

$$\forall f \in \mathbb{E} : \quad \Phi(f) = g,$$

tel que la fonction g est exprimée par

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad g(x) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} sin(x + t) \; f(t) \, dt.$$

Exercice 2 (14 pts).

Soit le système

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 3\,x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \\[2mm] \dfrac{dx_2}{dt} = -x_1 + 3\,x_2 + 3\,x_3 + x_4 \\[2mm] \dfrac{dx_3}{dt} = x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \\[2mm] \dfrac{dx_4}{dt} = -x_1 + x_2 + x_3 + 3\,x_4 \end{cases}$$

1. Écrire le système sous la forme

(1) $$\frac{d}{dt} X = \mathcal{A}\, X.$$

2. Montrer que le polynôme caractéristique de la matrice $\mathcal{A}$ vaut

$$P_{\mathcal{A}}(\lambda) = (\lambda - 4)^3 \, (\lambda - 2).$$

3. Donner une matrice réduite $\mathcal{A}'$ pour la matrice $\mathcal{A}$ et une matrice de passage correspondante à la réduction.
4. Donner la décomposition de Dunford de la matrice $\mathcal{A}$.
5. Résoudre le système

$$\frac{d}{dt} Y = \mathcal{A}'\, Y.$$

6. Déterminer la solution X du système (1).
7. Déterminer les sous espaces caractéristiques de la matrice $\mathcal{A}$.

BP 165 RP, Bel Horizon, Tlemcen DZ - 13000, Algérie. Tél.+213(0)43 204 135. Fax. +213(0)43 201 824. www.epst-tlemcen.dz
mail to : m.houbad@gmail.com

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L' ENSEIGNEMENT SUPÉRIEURE ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
ÉCOLE PRÉPARATOIRE EN SCIENCES ET TECHNIQUES
TLMCEN
Département des Mathématiques

ÉPREUVE FINALE DU PREMIER SEMESTRE, SOLUTION ET BARÈME

Module: ALGÈBRE III | Responsable: M.HOUBAD
Date: 27 - 01 - 2015 | Année: 2014 - 2015
Coefficient: 3 | Durée: $2h00$

Exercice 1 (06 pts).

Soit $\mathbb{E} = C^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$ vu comme étant un $\mathbb{R}$ – espace vectoriel, on veut déterminer les valeurs porpres et les vecteurs propres de l'endomorphisme Φ défini par

$$\forall f \in \mathbb{E} : \quad \Phi(f) = g,$$

tel que la fonction g est exprimée par

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad g(x) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} sin(x+t)\, f(t)\, dt.$$

01 pt Il s'agit de résoudre l'équation suivante

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad \lambda f(x) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} sin(x+t)\, f(t)\, dt.$$

01 pt qui peut être mise sous la forme

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad \lambda\, f(x) = A\, cos(x) + B\, sin(x)\,.$$
$$A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} sin(t)\, f(t)\, dt\,, \quad B = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} cos(t)\, f(t)\, dt\,.$$

01 pt 1. Dans le cas ou $\lambda = 0$, on a

$$\mathbb{E}_0 = \{ f \in \mathbb{E} / \quad A = 0\,, \quad B = 0 \}\,.$$

03 pt 2. Dans le cas ou $\lambda \neq 0$

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad f(x) = \frac{A}{\lambda} cos(x) + \frac{B}{\lambda} sin(x)\,.$$

on remplace dans l'expression de A et de B on a

$$A = \frac{\pi}{2}\frac{B}{\lambda}\,, \quad B = \frac{\pi}{2}\frac{A}{\lambda} \Longrightarrow \left[\lambda^2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \right] A = 0\,, \quad B = \frac{\pi}{2}\frac{A}{\lambda}\,,$$

vu que A et B ne peut être nuls simultanément alors nécessairement

$$\lambda = \pm \frac{\pi}{2}$$

ce qui donne deux cas possible

$$B = A\,, \quad \lambda_1 = +\frac{\pi}{2} \Longrightarrow f(x) = \frac{A}{\lambda_1} (cos(x) + sin(x))\,.$$
$$B = -A\,, \quad \lambda_2 = -\frac{\pi}{2} \Longrightarrow f(x) = \frac{A}{\lambda_2} (cos(x) - sin(x))\,.$$

En conclusion

$$\mathbb{E}_{+\frac{\pi}{2}} = \text{Vect}\, \langle cos(x) + sin(x) \rangle \quad \mathbb{E}_{-\frac{\pi}{2}} = \text{Vect}\, \langle cos(x) - sin(x) \rangle\,.$$

Exercice 2 (14 pts).

Soit le système

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} &= 3\,x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \\ \dfrac{dx_2}{dt} &= -\,x_1 + 3\,x_2 + 3\,x_3 + x_4 \\ \dfrac{dx_3}{dt} &= x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \\ \dfrac{dx_4}{dt} &= -\,x_1 + x_2 + x_3 + 3\,x_4 \end{cases}$$

$\boxed{\texttt{01 pt}}$

1. Écriture du système sous la forme matricielle

$$\frac{d}{dt}X = \mathcal{A}\,X\,,\quad A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix},\quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix},$$

$\boxed{\texttt{01 pt}}$

2. Le polynôme caractéristique de la matrice $\mathcal{A}$

$$P_{\mathcal{A}}(\lambda) = (\lambda - 4)(\lambda - 2)^3.$$

$\boxed{\texttt{02 pt}}$

3. Une matrice réduite $\mathcal{A}'$ pour la matrice $\mathcal{A}$ et une matrice de passage correspondante à la réduction. Détermination des sous espaces propres

$$\mathbb{E}_2 = \text{Vect}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle,\quad \mathbb{E}_4 = \text{Vect}\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Remarque : Une seule méthode est comptabilisée selon l'ordre suivant si l'application numérique est fausse et la méthode utilisé est juste alors 33% de la note seras attribué

$\boxed{\texttt{02 pt}}$

(a) Réduction de Jordan :

i. La matrice réduite

$$A'_{Jordan} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

ii. La matrice de passage

$$\begin{cases} \mathcal{A}\,v_1 &= 2\,v_1 \\ \mathcal{A}\,v_2 &= v_1 + 2\,v_2 \\ \mathcal{A}\,v_3 &= v_2 + 2\,v_3 \\ \mathcal{A}\,v_4 &= 4\,v_4 \end{cases}$$

ce qui donne que

$$P_{Jordan} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\texttt{02 pt}}$

(b) Réduction en blocs :

$$A'_{Bloc} = \begin{pmatrix} 2 & a & b & 0 \\ 0 & 2 & c & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \mathcal{A}\, v_1 &= 2\, v_1 \\ \mathcal{A}\, v_2 &= a\, v_1 \;+\; 2\, v_2 \\ \mathcal{A}\, v_3 &= b\, v_1 \;+\; c\, v_2 \;+\; 2\, v_3 \\ \mathcal{A}\, v_4 &= 4\, v_4 \end{cases}$$

dans l'équation deux en prend $a = 2$ ce qui permet d'avoir

$$v_2 \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

l'équation trois permet d'avoir

$$v_3 \;=\; \begin{pmatrix} y + b/2 + c/2 \\ y \\ b/2 \\ c/2 \end{pmatrix},$$

ce qui donne que

$$P_{Bloc} \;=\; \left(\begin{array}{c|c|c|c} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \right) \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 & y + b/2 + c/2 & 0 \\ 1 & 0 & y & 1 \\ 0 & 1 & b/2 & 0 \\ 0 & 0 & c/2 & 1 \end{pmatrix}$$

ce qui donne

$$\det P_{Bloc} \;=\; c\,,$$

on choisit

$$c \;=\; 2, \quad b \;=\; 0, \quad y \;=\; 0\,.$$

En conclusion

$$A'_{Bloc} \;=\; \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad P_{Bloc} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

02 pt

(c) Trigonalisation :

$$A'_{Trigo} \;=\; \begin{pmatrix} 2 & a & b & c \\ 0 & 2 & d & e \\ 0 & 0 & 2 & f \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \mathcal{A}\, v_1 &= 2\, v_1 \\ \mathcal{A}\, v_2 &= a\, v_1 \;+\; 2\, v_2 \\ \mathcal{A}\, v_3 &= b\, v_1 \;+\; d\, v_2 \;+\; 2\, v_3 \\ \mathcal{A}\, v_4 &= c\, v_1 \;+\; e\, v_2 \;+\; f\, v_3 \;+\; 4\, v_4 \end{cases}$$

on fait le même procédure que la partie "réduction en bloc" cela permet d'avoir

$$A'_{Trigo} \;=\; \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad P_{Trigo} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4. La décomposition de Dunford de la matrice $\mathcal{A}$.

02 pt

(a) Selon la réduction de Jordan

$$A'_{Jordan} \;=\; \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}}_{=\,\mathcal{D}'} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=\,\mathcal{N}'}$$

or

$$\mathcal{A} \;=\; P_{Jordan}\,\mathcal{A}'\,P_{Jordan}^{-1}\,,$$

donc

$$A \;=\; \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}}_{=\,\mathcal{D}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=\,\mathcal{N}}$$

02 pt

(b) Selon la réduction en Bloc et la trigonalisation

$$A'_{Bloc} \;=\; \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}}_{=\;\mathcal{D}'} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=\;\mathcal{N}'},$$

or

$$\mathcal{A} \;=\; P_{Bloc}\,\mathcal{A}'\,P_{Bloc}^{-1}\,,$$

donc

$$A \;=\; \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}}_{=\,\mathcal{D}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=\,\mathcal{N}}$$

5. Résolution du système

02 pt

(a) Selon la réduction de Jordan

$$\frac{d}{dt}\,Y \;=\; \mathcal{A}'_{Jordan}\,Y \;\Longrightarrow\; Y \;=\; e^{\mathcal{A}'_{Jordan}\,t}\,C \;=\; e^{\mathcal{D}'_{Jordan}\,t}\,e^{\mathcal{N}'_{Jordan}\,t}\,C$$

alors

$$\begin{aligned} Y \;&=\; \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{4t} \end{pmatrix} \left[\sum_{k\,=\,0}^{2} \frac{t^k}{k!}\,\mathcal{N}'^{k}_{Jordan}\right] C \\ &=\; \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & t^2e^{2t}/2 & 0 \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{4t} \end{pmatrix} C \\ &=\; \begin{pmatrix} e^{2t}\left[c_1 + c_2 t + c_3 \dfrac{t^2}{2}\right] \\ \\ e^{2t}\,[c_2 + c_3 t] \\ \\ e^{2t} c_3 \\ \\ e^{4t} c_4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

02 pt

(b) Selon la réduction en Bloc et la trigonalisation

$$\frac{d}{dt}\,Y \;=\; \mathcal{A}'_{Bloc/Trigo}\,Y \;\Longrightarrow\; Y = e^{\mathcal{A}'_{Bloc/Trigo}\,t}\,C \;=\; e^{\mathcal{D}'_{Bloc/Trigo}\,t}\,e^{\mathcal{N}'_{Bloc/Trigo}\,t}\,C$$

alors

$$
\begin{aligned}
Y &= \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{4t} \end{pmatrix} \left[\sum_{k=0}^{2} \frac{t^k}{k!} \mathcal{N}'^{k}_{Bloc/Trigo} \right] C \\
&= \begin{pmatrix} e^{2t} & 2te^{2t} & 2t^2e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} & 2te^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{4t} \end{pmatrix} C \\
&= \begin{pmatrix} e^{2t}\left[c_1 + 2c_2 t + 2c_3 t^2\right] \\ \\ e^{2t}\left[c_2 + 2c_3 t\right] \\ \\ e^{2t} c_3 \\ \\ e^{4t} c_4 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

6. Détermination de la solution X du système.

`02 pt`

(a) Selon la réduction de Jordan

$$
X = P_{Jordan} Y_{Jordan} = \begin{pmatrix} e^{2t}\left[\left(c_1 + \frac{1}{2}c_2 + \frac{1}{4}c_3\right) + \left(c_2 + \frac{1}{2}c_3\right)t + \frac{1}{2}c_3 t^2\right] \\ \\ e^{2t}\left[c_1 + c_2 t + c_3 \frac{t^2}{2}\right] + e^{4t} c_4 \\ \\ e^{2t}\left[\frac{1}{2}c_2 + \frac{1}{2}c_3 t\right] \\ \\ e^{2t}\frac{1}{4}c_3 + e^{4t} c_4 \end{pmatrix}.
$$

`02 pt`

(b) Selon la réduction en Bloc et la trigonalisation

$$
X = P_{Bloc/Trigo}\, Y_{Bloc/Trigo} = \begin{pmatrix} e^{2t}\left[(c_1 + c_2 + c_3) + 2(c_2 + c_3)t + 2c_3 t^2\right] \\ \\ e^{2t}\left[c_1 + 2c_2 t + 2c_3 t^2\right] + e^{4t} c_4 \\ \\ e^{2t}\left[c_2 + 2c_3 t\right] \\ \\ e^{2t} c_3 + e^{4t} c_4 \end{pmatrix}.
$$

7. Détermination des sous espaces caractéristiques de la matrice $\mathcal{A}$.

`02 pt`

(a) Selon la réduction de Jordan

$$
N_2 = \mathrm{Vect}\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \mathrm{Vect}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/4 \\ 0 \\ 0 \\ 1/4 \end{pmatrix} \right\rangle
$$

$$
N_4 = \mathrm{Vect}\langle v_4 \rangle = \mathrm{Vect}\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.
$$

02 pt

(b) Selon la réduction en Bloc et la trigonalisation

$$N_2 = \text{Vect}\langle v_1, v_2, v_3\rangle = \text{Vect}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$N_4 = \text{Vect}\langle v_4\rangle = \text{Vect}\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L' ENSEIGNEMENT SUPÉRIEURE ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
ÉCOLE PRÉPARATOIRE EN SCIENCES ET TECHNIQUES
TLMCEN
Département des Mathématiques

ÉPREUVE FINALE DE DEUXIÈME SEMESTRE

Module: ALGÈBRE IV — Responsable: M.HOUBAD
Date: 19 - 05 - 2015 — Année: 2014 - 2015
Coefficient: 3 — Durée: $2h00$

Exercice 1 (07 pts).
Soit $\mathbb{E} = \mathbb{R}_2[X]$ vu comme étant un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel et soit le produit scalaire

$$\forall p, q \in \mathbb{E} : \quad \langle\, p, q\,\rangle = \int_{-1}^{+1} p(x)q(x)dx$$

soit le sous espace vectoriel $\mathbb{F}$ défini

$$\mathbb{F} = \left\{ p \in \mathbb{E} : \quad p^{(1)}(x) - p^{(1)}(0) = \left(\int_{-1}^{+1} p(t)dt \right) x \right\}$$

1. Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{F}$.
2. Déterminer la projection orthogonale de p sur le sous espace vectoriel $\mathbb{F}$.

Exercice 2 (07 pts).
Soit $\mathbb{E} = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vu comme étant un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel, on note par

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

et soit

$$\forall \mathcal{A} \in \mathbb{E} : \quad \| \mathcal{A} \| = \sqrt{4x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 + x_4^2 + 6x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_1x_4 + 4x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4}$$

1. Montrer que $\| \cdot \|$ représente une norme sur $\mathbb{E}$ et déterminer le produit scalaire associé.
2. Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{E}$.

Exercice 3 (06 pts).
Soit $(\mathbb{R}^4, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ vu comme étant un espace euclidien tel que

$$\langle\, X, Y\,\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$$

$\mathbb{R}$ - espace vectorielSoit l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ définie par

$$\forall X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \quad P(X) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2x + 2y - z - t \\ 2x + 2y - z - t \\ x + y + z - 2t \\ x + y - 2z + t \end{pmatrix}$$

1. Déterminer la matrice associée à P dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
2. Montrer que P est une projection de $\mathbb{R}^4$.
3. Déterminer l'espace $\mathbb{F}$ sur lequel on fait la projection et l'espace $\mathbb{G}$ avec lequel on dirige la projection.
4. Cette projection est - elle pas orthogonale.
5. Déterminer la projection orthogonale sur le sous espace vectoriel $\mathbb{G}$.

BP 165 RP, Bel Horizon, Tlemcen DZ - 13000, Algérie. Tél.+213(0)43 204 135. Fax. +213(0)43 201 824. www.epst-tlemcen.dz
mail to : m.houbad@gmail.com

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L' ENSEIGNEMENT SUPÉRIEURE ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ÉCOLE PRÉPARATOIRE EN SCIENCES ET TECHNIQUES

T L M C E N

Département des Mathématiques

SOLUTION ET BARÈME
ÉPREUVE FINALE DE DEUXIÈME SEMESTRE

Module: ALGÈBRE IV	Responsable: M.HOUBAD
Date: 19 - 05 - 2015	Année: 2014 - 2015
Coefficient: 3	Durée: $2h00$

Exercice 1 (07 pts).
Soit $\mathbb{E} = \mathbb{R}_2[X]$ vu comme étant un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel et soit le produit scalaire

$$\forall\, p, q \in \mathbb{E} : \quad \langle\, p, q\,\rangle = \int_{-1}^{+1} p(x)q(x)dx$$

soit le sous espace vectoriel $\mathbb{F}$ défini

$$\mathbb{F} = \left\{ p \in \mathbb{E} : \quad p^{(1)}(x) - p^{(1)}(0) = \left(\int_{-1}^{+1} p(t)dt \right) x \right\}$$

1. Détermination d'une une base orthonormée de $\mathbb{F}$.

01pt (a) Détermination d'une base de $\mathbb{F}$. Soit $p \in \mathbb{F}$ donc

$$p(x) = ax^2 + bx + c, \quad p^{(1)}(x) - p^{(1)}(0) = \left(\int_{-1}^{+1} p(t)dt \right) x$$

ce qui donne

$$a = \frac{3}{2}c$$

donc

$$p(x) = \frac{1}{2}c(3x^2 + 2) + bx$$

finalement

$$\mathbb{F} = \text{Vect}\left\langle 3x^2 + 2, x \right\rangle$$

(b) Porcédure de Gram-Schimdt pour déterminer une base orthonormée

01 pt i. Orthogonalisation

$$\begin{cases} v_1 = 3x^2 + 2 \\ v_2 = x + \lambda(3x^2 + 2) \\ \langle v_1, v_2 \rangle = 0 \end{cases}$$

ce qui donne que $\lambda = 0$

01 pt ii. Normalisation

$$\left\| 3x^2 + 2 \right\| = \sqrt{\frac{98}{5}}, \quad \|x\| = \sqrt{\frac{2}{5}}$$

0,5 pt iii. Conclusion la base suivante

$$\left\{ \sqrt{\frac{5}{98}}(3x^2 + 2), \sqrt{\frac{5}{2}}x \right\}$$

est une base orthonormée de $\mathbb{E}$.

2. Détermination de la projection orthogonale de p sur le sous espace vectoriel $\mathbb{F}$.

01 pt (a) Détermination de la matrice de Gramm

$$G = \begin{pmatrix} \langle 3x^2+2, 3x^2+2\rangle & \langle 3x^2+2, x\rangle \\ \langle x, 3x^2+2\rangle & \langle x, x\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{98}{5} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

0,5pt (b) Calcule de G^{-1}

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{98} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

01 pt (c) Détermination des composante de la porjection

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = G^{-1}\begin{pmatrix} \langle p, 3x^2+2\rangle \\ \langle p, x\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{98} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{38}{15}a+8c \\ \frac{2}{3}b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{98}\left(\frac{38}{15}a+8c\right) \\ b \end{pmatrix}$$

01 pt (d) Détermination de la porjection

$$\mathcal{P}(p) = \alpha(3x^2+2) + \beta x$$

donc

$$\mathcal{P}(p) = \frac{5}{98}\left(\frac{38}{15}a+8c\right)(3x^2+2) + bx$$

Exercice 2 (07 pts).

Soit $\mathbb{E} = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vu comme étant un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel, on note par

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

et soit

$$\forall \mathcal{A} \in \mathbb{E} : \quad \| \mathcal{A} \| = \sqrt{4x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 + x_4^2 + 6x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_1x_4 + 4x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4}$$

1. On montrer que $\|\cdot\|$ représente une norme sur $\mathbb{E}$ et on détermine le produit scalaire associé. Il suffit de montrer que

$$\mathcal{Q}(X) = 4x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 + x_4^2 + 6x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_1x_4 + 4x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4$$

représente une forme quadratique définie positive,

01pt (a) $\mathcal{Q}$ est un polynôme homgène de degré deux

02,5pt (b) De plus la réduction de Sylvester donne

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(X) &= [x_4^2 + 2x_4(x_1+x_2+x_3)] + 4x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 + 6x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 \\ &= [x_1+x_2+x_3+x_4]^2 + 3x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 \\ &= [x_1+x_2+x_3+x_4]^2 + [x_3^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3] + 3x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_1x_2 \\ &= [x_1+x_2+x_3+x_4]^2 + [x_1+x_2+x_3]^2 + 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 \\ &= [x_1+x_2+x_3+x_4]^2 + [x_1+x_2+x_3]^2 + [x_1^2+x_2]^2 + x_1^2 \end{aligned}$$

$$\operatorname{sg}(\mathcal{Q}) = (4, 0)$$

donc $\mathcal{Q}$ est définie positive.

2. Détermination d'une base orthonormée de $\mathbb{E}$.

01pt On a le système

$$\begin{cases} x_1' &= x_1+x_2+x_3+x_4 \\ x_2' &= x_1+x_2+x_3 \\ x_3' &= x_1^2+x_2 \\ x_4' &= x_1 \end{cases} \implies \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=\mathcal{A}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

`01,5pt` ce qui donne la matrice de passage suivante

$$P = \mathcal{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

`01pt` donc la famille

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

est une base orthonormée de $\mathbb{E}$.

Exercice 3 (06 pts).
Soit $(\mathbb{R}^4, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ vu comme étant un espace euclidien tel que

$$\langle X, Y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4$$

$\mathbb{R}$ - espace vectorielSoit l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ définie par

$$\forall X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \quad P(X) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2x + 2y - z - t \\ 2x + 2y - z - t \\ x + y + z - 2t \\ x + y - 2z + t \end{pmatrix}$$

`01pt` 1. Détermination de la matrice associée à P dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

$$\mathcal{A} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

`01pt` 2. On montrer que P représente une projection de $\mathbb{R}^4$. On a

$$\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$$

donc

$$P \circ P = P$$

ce qui donne que P est une projection.

3. Détermination de l'espace $\mathbb{F}$ sur lequel on fait la projection et l'espace $\mathbb{G}$ avec lequel on dirige la projection.

`0,5pt` (a) L'espace sur lequel on fait la projection.

$$\mathbb{F} = \mathrm{Im}(P)$$

alors

$$Y \in \mathrm{Im}(P) \implies \begin{cases} 3y_1 &= 2x + 2y - z - t \\ 3y_2 &= 2x + 2y - z - t \\ 3y_3 &= x + y + z - 2t \\ 3y_4 &= x + y - 2z + t \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} y_1 &= y_2 \\ y_2 - 2y_3 &= -z + t \\ 3y_3 &= x + y + z - 2t \\ y_4 - y_3 &= -z + t \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} y_1 &= y_2 \\ y_2 - 2y_3 &= y_4 - y_3 \\ 3y_3 &= x + y + z - 2t \\ y_4 - y_3 &= -z + t \end{cases}$$

donc

$$\mathrm{Im}(P) = \left\{ Y \in \mathbb{R}^4 / \quad y_1 = y_2, \quad y_4 = y_2 - y_3 \right\} = \mathrm{Vect} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

01pt (b) L'epace avec lequel on dririge la projection.

$$\mathbb{F} = \mathrm{Ker}(P)$$

alors

$$X \in \mathrm{Ker}(P) \implies \begin{cases} 2x+2y-z-t &= 0 \\ x+y+z-2t &= 0 \\ x+y-2z+t &= 0 \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} 2x+2y-z-t &= 0 \\ x+y+z-2t &= 0 \\ z &= t \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} x+y+z-2t &= 0 \\ z &= t \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} x &= -y+t \\ z &= t \end{cases}$$

donc

$$\mathrm{Ker}(P) = \left\{X \in \mathbb{R}^4 / \quad x=-y+t, \quad z=t\right\} = \mathrm{Vect}\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

0,5pt 4. Cette projection est - elle orthogonale. ? Vu que

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 2 \neq 0$$

donc $\mathbb{F}$ n'est pas orthogonal à $\mathbb{G}$ et donc cette projection n'est pas orthogonale.

5. Déterminatin de la projection orthogonale sur le sous espace vectoriel $\mathbb{G}$.

01pt (a) Détermination de la matrice de Gram associée à la base de $\mathbb{G}$

$$G = \begin{pmatrix} \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle & \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \\ \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle & \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

0,5pt (b) Détermination des composantes de la porjection

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = G^{-1} \begin{pmatrix} \left\langle X, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \\ \left\langle X, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2x+3y+z+t \\ x+y+2z+2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x+y \\ x+z+t \end{pmatrix}$$

ce qui donne que

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x+3y+z+t \\ x+y+2z+2t \end{pmatrix}$$

0,5pt

(c) Détermination de l'expression de la projection

$$P(X) = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et donc

$$P(X) = (-2x + 3y + z + t) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (x + y + 2z + 2t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$