

ALGÈBRE III

Série de Travaux Dirigés Numéro 1

Diagonalisation et Trigonalisation des Endomorphismes

Responsable du module: M.HOUBAD

14 Septembre 2014

Exercice 1.

Soit $\mathbb{E} = C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ le \mathbb{R} -espace vectoriel des fonctions infiniment dérivables sur \mathbb{R} à valeur dans \mathbb{R} . Montrer que les familles suivantes sont libres

$$\{x, e^x\}, \{x, \sin(x)\}, \{\sin(x), \cos(x)\}, \{e^x, e^{2x}, e^{3x}\}.$$

Exercice 2.

Déterminer la dimension des sous espaces vectoriels suivants

1. Dans le cas de \mathbb{R}^4 vu comme un \mathbb{R} -espace vectoriel, les sous espaces vectoriels sont

$$F_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y = 2t + z\},$$

$$F_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x + 3y + 3z - 2t = 0, x + 5y + z + 3t = 0\}.$$

2. Dans le cas de $\mathbb{R}_4[X]$ le \mathbb{R} -espace vectoriel des polynômes à une indéterminée à coefficients dans \mathbb{R} de degré au plus 4, les sous espaces vectoriels sont

$$\mathcal{P}_1 = \left\{ P \in \mathbb{R}_3[X] : \int_{-\infty}^{+\infty} (X^2 + X + 1) P(X) dX = 0 \right\}.$$

$$\mathcal{P}_2 = \left\{ P \in \mathbb{R}_4[X] : P^{(2)}(X)X - P^{(3)}(X)X^2 = P(0)X^5 \right\}.$$

Exercice 3.

Soit l'application suivante

$$\forall X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : f(X) = \begin{pmatrix} x - y - z \\ -y - 2z \\ x + z \end{pmatrix},$$

1. Montrer qu'elle est linéaire, déterminer son noyau et son image ainsi que son rang.
2. Déterminer sa matrice associée dans la base canonique de l'espace \mathbb{R}^3 .
3. Déterminer de deux façons différentes sa matrice associée dans la base suivante

$$\mathcal{B} = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Exercice 4.

Soit l'endomorphisme f de $\mathbb{R}_2[X]$ défini par l'expression suivante

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X] : f(P) = P^{(1)} + P^{(2)}X.$$

1. Déterminer la matrice associée à f dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer la matrice de passage de la base canonique à la base

$$\mathcal{B} = \{X^2 + 1, X + 1, X^2 + X + 1\}.$$

Exercice 5.

Soient \mathbb{E} un \mathbb{K} - espace vectoriel de dimension finie, \mathbb{F} et \mathbb{G} deux sous espaces vectoriels de \mathbb{E} . Montrer que $\mathbb{F} \cap \mathbb{G}$ est un sous espace vectoriel de \mathbb{E} et que

$$\text{Vect} \langle \mathbb{F} \cup \mathbb{G} \rangle = \mathbb{F} + \mathbb{G}.$$

Exercice 6.

Soit $\mathcal{P} \in \mathbb{R}_n[X]$ un polynôme de degré exactement n , et soit la famille de $\mathbb{R}_n[X]$ définie par

$$\mathcal{F}_p = \left\{ \mathcal{P}, \mathcal{P}^{(1)}, \mathcal{P}^{(2)}, \dots, \mathcal{P}^{(p-1)}, \mathcal{P}^{(p)} \right\},$$

Déterminer p pour lequel la famille \mathcal{F}_p soit une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 7.

Soit le sous ensemble de l'espace vectoriel $\mathbb{E} = C^\infty([0, \pi], \mathbb{R})$ défini par

$$\mathcal{T}_3 = \left\{ f \in C^\infty([0, \pi], \mathbb{R}) / \exists (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 : f(x) = a_1 \sin(x) + a_2 \sin(2x) + a_3 \sin(3x) \right\}$$

et soit l'application Ψ définie sur \mathcal{T}_3 par

$$\forall f \in \mathcal{T}_3 : \Psi(f) = f^{(2n)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

1. Montrer que \mathcal{T}_3 est un sous espace vectoriel de \mathbb{E} .
2. Déterminer la dimension de \mathcal{T}_3 .
3. Montrer que Ψ représente un endomorphisme de \mathcal{T}_3 .
4. Déterminer les deux ensembles $\text{Ker } \Psi$ et $\text{Im } \Psi$.
5. Déterminer la matrice associée à Ψ dans une base de \mathcal{T}_3 .

Exercice 8.

Soient $\mathbb{C}_n[X]$ le \mathbb{C} - espace vectoriel des polynômes à une indéterminée à coefficients dans \mathbb{C} de degré au plus n , f une application définie sur $\mathbb{C}_n[X]$ par

$$\forall \mathcal{P} \in \mathbb{C}_n[X] : f(\mathcal{P}) = (X^n \mathcal{P})^{(n)},$$

Montrer que f représente un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$, déterminer l'ensemble $\text{Ker } f$.

Exercice 9.

Soit la matrice \mathcal{A} de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ définie par

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de \mathcal{A} .

Exercice 10.

Soit f un endomorphisme d'un \mathbb{K} - espace vectoriel de dimension finie, montrer que

$$0 \in \text{Sp}(f) \iff f \text{ n'est pas bijective}.$$

Exercice 11.

Soit U un isomorphisme d'un \mathbb{K} - espace vectoriel \mathbb{E} de dimension finie, montrer que

$$\text{Sp}(U^{-1}) = \{ \lambda^{-1} / \lambda \in \text{Sp}(U) \}.$$

Exercice 12.

Soit l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 définie en donnant trois constantes a, b, c de \mathbb{R} est par l'expression

$$g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x + a y + 2 z \\ 2 y + b z \\ c z \end{pmatrix}.$$

Déterminer le triplet (a, b, c) de telle sorte que l'endomorphisme g soit diagonalisable.

Exercice 13.

Soient $\mathbb{R}_2[X]$ un \mathbb{R} - espace vectoriel et f l'application définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par

$$\forall \mathcal{P} \in \mathbb{R}_2[X] : f(\mathcal{P}) = \mathcal{P} + (2X + 1)\mathcal{P}^{(1)} + (X^2 + 1)\mathcal{P}^{(2)}.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

2. Calculer $f^n(a_0 + a_1 X + a_2 X^2)$.

Exercice 14.

Soient $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ trois suites numériques réelles vérifiant

$$\begin{cases} U_n = 8 U_{n-1} + 9 Z_{n-1}, \\ V_n = -3 U_{n-1} - V_{n-1} - 3 Z_{n-1}, \\ Z_n = -6 U_{n-1} - 7 Z_{n-1}. \end{cases}$$

Déterminer les termes U_n , V_n et Z_n en fonction de n , $U_0 = a$, $V_0 = b$ et $Z_0 = c$.

Exercice 15.

Résoudre les deux systèmes différentiels d'ordre un à coefficients constants

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + 2y - 2z, \\ \frac{dy}{dt} = -x + z, \\ \frac{dz}{dt} = x + y. \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + y + 2z, \\ \frac{dy}{dt} = x + y, \\ \frac{dz}{dt} = -x + y + 2z. \end{cases}$$

Exercice 16.

Déterminer le terme générale de la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, n > 2 : U_n &= -2 \cos(\alpha) U_{n-1} - U_{n-2}, \\ U_2 &= 4(\cos \alpha)^2 - 1, \quad U_1 = 2 \cos \alpha. \end{aligned}$$

Exercice 17.

Dans cette exercice on veut montrer que la matrice

$$\mathcal{A}_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

est diagonalisable. On note dans la suite par P_n le polynôme caractéristique de \mathcal{A}_n .

1. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n > 2 : P_n(x) = -x P_{n-1}(x) - P_{n-2}(x).$$

2. Montrer que toutes les racines de P_n sont dans l'intervalle $]-2, +2[$ (Indication : utiliser l'exercice précédent).

3. Dédurre que \mathcal{A}_n est diagonalisable.

Exercice 18.

Résoudre l'équation différentielle suivante

$$\forall t \in \mathbb{R} : f^{(3)}(t) - 3f^{(2)}(t) + 3f^{(1)}(t) - f(t) = 0,$$

Exercice 19.

Soient les deux matrices

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

1. Calculer la valeur de

$$\mathcal{A}\mathcal{M} - \mathcal{M}\mathcal{A}.$$

2. Déterminer les valeurs et les vecteurs propres de l'endomorphisme \mathcal{L} de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par

$$\forall \mathcal{M} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : \mathcal{L}(\mathcal{M}) = \mathcal{A}\mathcal{M} - \mathcal{M}\mathcal{A}.$$

Exercice 20.

Soit $\mathbb{E} = C^0(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ le \mathbb{R} -espace vectoriel des fonctions infiniment dérivables sur \mathbb{R} à valeur dans \mathbb{C} , on définit l'endomorphisme Φ de \mathbb{E} par

$$\Phi : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}, f \longmapsto \Phi(f),$$

tel que

$$\forall x \in \mathbb{R} : \Phi(f)(x) = \int_{-\pi/4}^{+\pi/4} \sin(x-t) f(t) dt.$$

Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de Φ .

Exercices supplémentaires**Exercice 21.**

Soit f un endomorphisme de \mathbb{R}^3 défini par

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} -x + y - z \\ -x + y + z \\ -2x + 2y \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que f est diagonalisable.
2. Déterminer une base dans laquelle la matrice associée à f est diagonale.

Exercice 22.

Soit $\mathbb{R}_2[X]$ le \mathbb{R} -espace vectoriel des polynômes à une indéterminée de degré au plus 2 à coefficients dans \mathbb{R} . On définit l'application linéaire L sur $\mathbb{R}_2[X]$ par l'expression

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X] : L(P) = Q,$$

tel que

$$\forall x \in \mathbb{R} : Q(x) = (1+x)P(x) - 3 \int_0^x P(t) dt.$$

1. Montrer que L est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Montrer que L ne peut être diagonalisée.

Exercice 23.

Soit la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer qu'elle est ni diagonalisable ni triangularisable dans \mathbb{R} .
2. Montrer qu'elle est diagonalisable dans \mathbb{C} et déterminer la matrice réduite diagonale et la matrice de passage correspondante.

Exercice 24.

Soit la matrice \mathcal{B} de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par

$$\mathcal{B} := \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

1. Montrer que la matrice \mathcal{B} est triangularisable.
2. Donner la forme réduite de \mathcal{B} est une matrice de passage correspondante.
3. Soient les fonctions $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ de classe C^1 de \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} , résoudre le système des équations différentielles linéaires autonome d'ordre un suivant

$$\frac{d}{dt} Y = \mathcal{B} Y.$$

Exercice 25.

Résoudre l'équation différentielle suivante dont $f \in C^3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est l'inconnu

$$\forall x \in \mathbb{R} : f^{(3)}(x) + f^{(2)}(x) - f^{(1)}(x) - f(x) = 0.$$

Exercice 26.

Soient $\mathbb{E} = C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ et \mathcal{D} l'endomorphisme de \mathbb{E} définie par

$$\forall f \in \mathbb{E} : \mathcal{D}(f) = f^{(1)}.$$

Déterminer les valeurs et les vecteurs propres de \mathcal{D} .

Exercice 27.

Soit $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ le \mathbb{R} -espace vectoriel des matrices carrées 2 lignes et 2 colonnes à coefficients dans \mathbb{R} , on définit l'application

$$\begin{aligned} \phi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ \mathcal{A} &\longrightarrow \phi(\mathcal{A}) = {}^t \mathcal{A}. \end{aligned}$$

1. Déterminer les valeurs propres de ϕ .
2. Déterminer si ϕ est diagonalisable.

Exercice 28.

Soit $C^0(\mathbb{R}_+; \mathbb{R})$ vu comme étant un \mathbb{R} -espace vectoriel, et soit son sous espace vectoriel défini par

$$\mathbb{E} = \{f \in C^0(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}) : f(0) = 0\},$$

on définit l'application φ sur \mathbb{E} par

$$\forall f \in \mathbb{E} : \begin{cases} \varphi(f)(0) = 0, \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^* : \varphi(f)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt. \end{cases}$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de \mathbb{E} .
2. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de φ .

Exercice 29.

Soit $\mathbb{E} := C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ le \mathbb{R} -espace vectoriel des fonctions continûment dérivables sur \mathbb{R} , et soit l'application Φ définie sur \mathbb{E} par

$$\Phi : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}, \quad f \longmapsto \Phi(f) = g,$$

tel que

$$\forall x \in \mathbb{R} : g(x) = \frac{\partial}{\partial t} \left[\sin(x+t) e^{x+t} f(t) \right]_{t=0}.$$

1. Montrer que Φ représente un endomorphisme de \mathbb{E} .
2. Déterminer les deux ensembles $\text{Ker } \Phi$ et $\text{Im } \Phi$.
3. Montrer que la restriction de Φ sur l'ensemble $\text{Im } \Phi$ n'est pas diagonalisable.

ALGÈBRE III

Série de Travaux Dirigés Numéro 2

Réduction en blocs et Réduction de Jordan

Responsable du module: M.HOUBAD

26 Novembre 2014

Exercice 1.

Soit $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que le polynôme caractéristique de \mathcal{A} est scindé.

1. Montrer que

$$\det \mathcal{A} = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(\mathcal{A})} \lambda^{\text{mul}(\lambda)}.$$

2. Déterminer les conditions sur les valeurs propres de \mathcal{A} pour que la matrice \mathcal{A} soit inversible.
3. Lorsque \mathcal{A} est inversible déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de \mathcal{A}^{-1} .
4. Montrer que si \mathcal{A} est diagonalisable inversible alors \mathcal{A}^{-1} est aussi diagonalisable.
5. Déterminer l'inverse de \mathcal{A} dans le cas où cette matrice est inversible sans utiliser la co-matrice de \mathcal{A} .

Exercice 2.

Soit \mathbb{E} un espace vectoriel sur \mathbb{K} et a un élément non nul de \mathbb{K} . Soit $f \in \text{End}(\mathbb{E})$ tel que

$$f^3 - 3af^2 + a^2f = 0.$$

1. Montrer que

$$\text{Im} f = \text{Ker}(f^2 - 3af + a^2 \text{Id}).$$

2. Montrer de deux façons différentes que

$$\mathbb{E} = \text{Ker} f \oplus \text{Ker}(f^2 - 3af + a^2 \text{Id}).$$

Exercice 3.

Soient \mathbb{E} un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie, f et g deux endomorphismes de \mathbb{E} vérifiant

$$f \circ g - g \circ f = f$$

1. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : f^n \circ g - g \circ f^n = n f^n.$$

2. Soit P un polynôme. Montrer que

$$P(f) = 0 \implies f \circ P'(f) = 0.$$

3. Soit P un polynôme. Montrer que

$$P(f) = 0 \implies \forall k \in \mathbb{N}^* : f^k \circ P^{(k)}(f) = 0.$$

4. En déduire que f est nilpotente.

5. En déduire que f est diagonalisable si et seulement si $f \equiv 0$.

Exercice 4.

Soient \mathbb{C}^n vu comme un \mathbb{C} -espace vectoriel, $\{e_1, \dots, e_n\}$ la base canonique de \mathbb{C}^n , et $f \in \text{End}(\mathbb{C}^n)$ défini par

$$\begin{cases} f(e_i) = e_{i+1}, & \forall i = 1, \dots, n-1, \\ f(e_n) = e_1. \end{cases}$$

1. Calculer $f^n(e_i)$ pour $i = 1, \dots, n$.

2. Déduire que l'endomorphisme f est diagonalisable.
3. Montrer que la famille suivante est libre

$$\{ \text{Id}, f, f^2, \dots, f^{n-2}, f^{n-1} \}.$$

4. Déterminer le polynôme minimal de l'endomorphisme f .

Exercice 5.

Soit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe une matrice $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admettant $x^2 + 1$ comme polynôme minimal si et seulement si n est paire.

Exercice 6.

Soit f un endomorphisme d'un \mathbb{K} -espace vectoriel admettant un polynôme minimal m_f et soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que les deux polynômes P et m_f sont premiers entre eux si et seulement si l'endomorphisme $P(f)$ est inversible.

Exercice 7.

Soit la matrice suivante

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 2 & 0 \\ 4 & -4 & 2 & 2 \\ 4 & -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

On utilise la décomposition de Dunford.

1. Déterminer le terme général de la suite vectorielle définie par

$$X_n = \mathcal{A} X_{n-1}, \quad X_0 \in \mathbb{R}^4.$$

2. On utilisant l'exponentielle d'une matrice, résoudre le système

$$\frac{d}{dt} X = \mathcal{A} X.$$

Exercice 8.

Soit la matrice

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de \mathcal{A} en utilisant la méthode des combinaisons des lignes et des colonnes pour le calcul du déterminant.
2. Déterminer les sous-espaces propres et les sous-espaces caractéristiques de \mathcal{A} .
3. Montrer que

$$\mathbb{R}^4 = \text{Ker}(\mathcal{A} - \text{I})^2 \oplus \text{Ker}(\mathcal{A} - 2\text{I})^2.$$
4. Donner la réduction en blocs triangulaires de la matrice \mathcal{A} et une matrice de passage correspondante.
5. Déterminer le polynôme minimal de \mathcal{A} .
6. Donner \mathcal{A}' la matrice réduite de Jordan de \mathcal{A} , une matrice de passage correspondante et calculer \mathcal{A}^n .
7. Donner la décomposition de Dunford de la matrice \mathcal{A} .
8. Calculer de deux méthodes différentes les valeurs de \mathcal{A}^{-1} sans utiliser la co-matrice de \mathcal{A} .

Exercice 9.

Soit $A \in \mathcal{M}_6(\mathbb{R})$ tel que

$$\begin{aligned} P_A(X) &= (X - 1)^4 (X - 2)^2, \\ m_A(X) &= (X - 1)^2 (X - 2). \end{aligned}$$

Quelles sont les formes de Jordan possibles pour la matrice A .

Exercices supplémentaires

Exercice 10.

Soient l'endomorphisme de \mathbb{R}^4 défini par

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + z - t \\ y + 2z \\ x + 2z \\ x + 2y \end{pmatrix}.$$

Déterminer le polynôme minimal de f et discuter le caractère de diagonalisation de f .

Exercice 11.

Soit \mathbb{E} un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, et soit f un endomorphisme de \mathbb{E} vérifiée

$$\forall x \in \mathbb{E} : f^3(x) = x.$$

Montrer alors qu'on a

$$\mathbb{E} = \text{Ker}(f - \text{Id}) \oplus \text{Ker}(f^2 + f + \text{Id}).$$

Exercice 12.

Soit la matrice

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Donner la réduction de Jordan de la matrice \mathcal{A} et une matrice de passage correspondante.
2. Donner la réduction de Dunford de la matrice \mathcal{A} et calculer \mathcal{A}^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 13.

Soit la matrice de $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ définie par

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Donner la réduction en blocs triangulaires de la matrice \mathcal{A} et une matrice de passage correspondante.
2. Donner la réduction de Dunford de la matrice \mathcal{A} .
3. Calculer \mathcal{A}^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 14.

Soit la matrice de $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ définie par

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de \mathcal{A} on utilisant la méthode des combinaisons des lignes et des colonnes pour le calcul du déterminant.
2. Déterminer les sous espaces propres et les sous espaces caractéristique de \mathcal{A} .
3. Montrer que

$$\mathbb{R}^4 = \text{Ker } \mathcal{A}^2 \oplus \text{Ker } (\mathcal{A} - \text{I})^2.$$

4. Donner la réduction en blocs triangulaires de la matrice \mathcal{A} et une matrice de passage correspondante.
5. Donner de deux méthodes différentes la réduction de Dunford de la Matrice \mathcal{A} .
6. Déterminer le terme générale de la suite vectoriel définie par

$$X_n = \mathcal{A} X_{n-1}, \quad X_0 \in \mathbb{R}^4.$$

7. On utilisant l'exponentielle d'une matrice, résoudre le système

$$\frac{d}{dt} X = A X .$$

Exercice 15.

Soit \mathbb{E} un \mathbb{K} - espace vectoriel et f un endomorphisme de \mathbb{E} . Montrer que si P est un polynôme annulateur de f alors

$$\mathbb{E} = \text{Ker } P(f) .$$

Exercice 16.

Soit \mathbb{E} un \mathbb{K} - espace vectoriel et P un polynôme sur \mathbb{K} , tel que $P = Q_1 Q_2$.

1. Montrer que si f un endomorphisme de \mathbb{E} alors

$$P(f) = Q_1(f) \circ Q_2(f) = Q_2(f) \circ Q_1(f) .$$

2. Si Q_1 et Q_2 sont premier entre eux alors

$$\text{Ker } P(f) = \text{Ker } Q_1(f) \oplus \text{Ker } Q_2(f) .$$

ALGÈBRE III

Série de Travaux Dirigés Numéro 3

Formes Bilinéaires – Formes Quadratiques

Responsable du module: M.HOUBAD

19 Janvier 2015

Exercice 1.

On définit la fonction suivante sur $\mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X]$ à valeurs dans \mathbb{R}

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}_2[X] : b(P, Q) = \int_{-1}^{+1} P(X) Q^{(1)}(X) dX .$$

1. Montrer qu'elle est bilinéaire et déterminer sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Discuter de deux façons différentes si elle est symétrique.
3. Écrire de deux façons différentes sa matrice dans la base

$$\{ 1, 1 + X, 1 + 2X + X^2 \} .$$

4. Déterminer le noyau de b et discuter si elle est dégénérée.

Exercice 2.

Soit \mathbb{E} un \mathbb{R} - espace vectoriel et soit g un endomorphisme de \mathbb{E} et φ une application bilinéaire symétrique non dégénérée de $\mathbb{E} \times \mathbb{E}$ à valeurs dans \mathbb{R} et soit l'application bilinéaire b de $\mathbb{E} \times \mathbb{E}$ dans \mathbb{R} . Dans le cas où \mathbb{E} est de dimension finie et g bijective trouver l'endomorphisme f de \mathbb{E} solution de l'équation

$$\forall X, Y \in \mathbb{E} : b(X, Y) = \varphi(f(X), g(Y)) .$$

Exercice 3.

Soit \mathbb{E} un \mathbb{R} - espace vectoriel, on note par \mathbb{S} le \mathbb{R} - espace vectoriel des formes bilinéaires symétriques définies sur \mathbb{E} , par \mathbb{A} le \mathbb{R} - espace vectoriel des formes bilinéaires antisymétriques définies sur \mathbb{E} et par \mathbb{B} le \mathbb{R} - espace vectoriel des formes bilinéaires définies sur \mathbb{E} .

1. Montrer que

$$\mathbb{B} = \mathbb{S} \oplus \mathbb{A} .$$

2. Montrer que pour toute forme bilinéaire $b \in \mathbb{B}$ la forme Q définie par

$$\forall x \in \mathbb{E} : Q(x) = b(x, x) ,$$

est une forme quadratique sur \mathbb{E} .

Exercice 4.

Soit \mathbb{E} un \mathbb{R} - espace vectoriel et b une forme bilinéaire non nécessairement symétrique, on définit la forme q par

$$\forall u \in \mathbb{E} : q(u) = b(u, u) .$$

1. Montrer que

$$\forall u, v \in \mathbb{E} : q(q(u)v - b(u, v)u) = q(u)[q(u)q(v) - b(u, v)b(v, u)] .$$

2. Si q est définie positive montrer que

$$\forall u, v \in \mathbb{E} : b(u, v)b(v, u) \leq q(u)q(v) .$$

Exercice 5.

Soit q une forme quadratique sur un \mathbb{K} - espace vectoriel \mathbb{E} . On désigne par \mathcal{A}^\perp l'orthogonale de \mathcal{A} relativement à la forme q . Montrer que si \mathcal{A} et \mathcal{B} sont deux parties non vide de \mathbb{E} dans au moins l'une contient le vecteur nul, alors

$$(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})^\perp = (\mathcal{A} + \mathcal{B})^\perp.$$

Exercice 6.

Soient les applications suivante définie sur \mathbb{R}^3 vue comme étant un \mathbb{R} - espace vectoriel

$$q_1(X) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2,$$

$$q_2(X) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3,$$

$$q_3(X) = x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2.$$

1. Montrer qu'elles représentent des forme quadratique sur \mathbb{R}^3 .
2. Déterminer la matrice et la forme polaire correspondante à chaque forme quadratique dans la base canonique
3. déterminer de deux facons la matrice associée à chaque forme quadratique dans la base

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

4. Déterminer le cône isotrope de chaque forme.
5. Déterminer la forme réduite de Sylvester, une base correspondante, la signature, le caractère d'être définie positive et le caractère d'être dégénérée.

Exercice 7.

On définit la fonction suivante sur $\mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X]$ à valeurs dans \mathbb{R}

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}_2[X] : b(P, Q) = \int_{-1}^{+1} P(X) Q^{(1)}(X) dX.$$

1. Montrer qu'elle est bilinéaire et déterminer sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Discuter de deux facon différente si elle est symétrique.
3. Écrire de deux facon différente sa matrice dans la base

$$\{1, 1+X, 1+2X+X^2\}.$$

4. Déterminer le noyau de b de deux facons différentes et discuter si elle est dégénérée.

Dans la suite on considère la forme q définie par

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X] : q(P) = b(P, P).$$

1. Montrer que q représente une forme quadratique sur $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer l'orthogonal par rapport à q des deux ensembles

$$\mathcal{D}_1 = \{P \in \mathbb{R}_2[X] : 2P - X P^{(1)} = 1\},$$

$$\mathcal{D}_2 = \{P \in \mathbb{R}_2[X] : P(0) = P^{(1)}(0)\}.$$

3. Déterminer la forme réduite de Sylvester de q et une base correspondante.
4. Déterminer le cône isotrope de q .
5. Montrer que $\mathbb{R}_2[X]$ admet des sous espaces isotropes relativement à Q et déterminer l'un d'eux.

Exercice 8.

Soit \mathbb{E} un \mathbb{R} - espace vectoriel de dimension finie, b une forme bilinéaires symétrique définie sur \mathbb{E} . Montrer que \mathbb{E} admet une base orthonormée par rapport à la forme b si et seulement si b est définie positive.

Exercices supplémentaires

Exercice 9.

Soit $\mathbb{E} := C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ vue comme étant un \mathbb{R} - espace vectoriel, on définit sur \mathbb{E} la relation

$$\forall f \in \mathbb{E} : \quad q(f) := \int_{-1}^{+1} f(x) f^{(2)}(x) dx.$$

Montrer qu'elle représente une forme quadratique sur \mathbb{E} , déterminer sa forme pôlaire et discuter si elle est définie positive.

Exercice 10.

Soient $\mathbb{R}_2[X]$ vue comme étant un \mathbb{R} - espace vectoriel et Q une application définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X] : \quad Q(P) = \int_{-1}^{+1} P(X) P^{(2)}(X) dX.$$

1. Montrer de deux façons qu'il s'agit d'une forme quadratique sur $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer sa forme réduite de Sylvester, une base correspondante et le cône isotrope.
3. Montrer que $\mathbb{R}_2[X]$ admet des sous espaces isotropes relativement à la forme Q et déterminer l'un d'eux.

Exercice 11.

Soit $\mathbb{R}_2[X]$ vue comme étant un \mathbb{R} - espace vectoriel, et soit l'application Φ définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ à valeurs dans \mathbb{R} par

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X] : \quad \Phi(P) := P(1) P^{(1)}(1).$$

1. Montrer que Φ représente une forme quadratique sur $\mathbb{R}_2[X]$ et déterminer sa forme pôlaire associée qu'on note S .
2. Déterminer l'orthogonale de sous espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$ défini par

$$F := \{ P \in \mathbb{R}_2[X] / P(X) = aX^2 + b, \text{ telque } a, b \in \mathbb{R} \}.$$

3. Résoudre l'équation suivante dans $\mathbb{R}_2[X]$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} : \quad S(\lambda X^2 + 1, (X - 1)P(X)) = 0.$$

4. Déterminer la forme réduite de Sylvester de la forme Φ et une base correspondante.

Exercice 12.

Soit $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vue comme étant un \mathbb{R} - espace vectoriel, et soit son sous espace vectoriel \mathbb{E} définie par

$$\mathbb{E} := \text{Vect} \langle \cos(x)^2, \cos(x), 1 \rangle.$$

On définit sur \mathbb{E} l'application

$$\forall f \in \mathbb{E} : \quad Q(f) := f^{(1)}\left(\frac{\pi}{4}\right) f\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

1. Montrer que Q représente une forme quadratique.
2. Déterminer S la forme pôlaire associée à Q .
3. Déterminer la forme réduite de Sylvester de la forme Q .
4. Déterminer le caractère d'être définie positive pour la forme S .

Exercice 13.

Soit $\mathbb{R}_2[X]$ le \mathbb{R} - espace vectoriel des polynômes à une indéterminée à coefficient dans \mathbb{R} de degré au plus deux, et soit l'application

$$\begin{aligned} b : \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (P, Q) &\longmapsto b(P, Q) = \int_{-1}^{+1} P(X) Q(X) dX. \end{aligned}$$

1. Montrer que b est une forme bilinéaire symétrique.
2. Déterminer la matrice associée à b dans la base de $\mathbb{R}_2[X]$ définie par

$$\{ X^2 - 1, X, 5X^2 - 1 \}.$$

3. Soit le sous ensemble de $\mathbb{R}_2[X]$ défini par

$$\mathcal{A} = \{ P \in \mathbb{R}_2[X] / P(X) = \alpha X^2 + \beta X - \alpha, \text{ tq } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \},$$

déterminer l'orthogonale de \mathcal{A} qu'on le note \mathcal{A}^\perp relativement à la forme b

4. Dédurre que

$$\mathbb{R}_2[X] = \mathcal{A} \oplus \mathcal{A}^\perp.$$

5. Discuter suivant les valeurs de $a \in \mathbb{R}$ l'existence des solutions dans $\mathbb{R}_2[X]$ de l'équation

$$\forall \gamma \in \mathbb{R} : b(\gamma X^2 + X - \gamma, (X + a)P(X)) = 0.$$

6. Déterminer la forme quadratique q associée à la forme bilinéaire b .

7. Déterminer la forme réduite de Sylvester de la forme q , donner sa signature.

8. La forme q est-elle définie positive ?

9. La forme q est-elle dégénérée ?

10. Déterminer une base de $\mathbb{R}_2[X]$ dans laquelle la forme quadratique q s'écrit sous la forme réduite de Sylvester.

ALGÈBRE III

Série de Travaux Dirigés Numéro 4

Espaces Préhilbertiens Réels et Espaces Euclidiens

Responsable du module: M.HOUBAD

08 Mars 2015

Exercice 1.

Soit f et g deux applications sur un espace pré hilbertien réel $(\mathbb{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$

1. Montrer que si f est surjective vérifiée

$$\forall x, y \in \mathbb{E} : \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle,$$

alors f est linéaire.

2. Montrer que si f et g vérifiant

$$\forall x, y \in \mathbb{E} : \langle f(x), y \rangle = \langle x, g(y) \rangle,$$

alors f et g sont linéaires.

Exercice 2.

Soit $(\mathbb{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace pré-hilbertien réel et soit \mathcal{A} est une famille orthogonale de vecteurs de \mathbb{E} tel que \mathcal{A} de cardinal fini et ne contient pas le vecteur nul. Montrer que \mathcal{A} est libre.

Exercice 3.

Soit $(\mathbb{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace pré-hilbertien réel et $\{x_k\}_{k=1}^p$ une famille orthogonale de \mathbb{E} . Montrer que

$$\left\| \sum_{k=1}^p x_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^p \|x_k\|^2.$$

Exercice 4.

Soit $(\mathbb{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace pré-hilbertien réel et $\{F_k\}_{k=1}^p$ une famille de sous espaces vectoriels de \mathbb{E} de deux à deux orthogonaux. Montrer que cette somme est directe.

Exercice 5.

Soit $\mathbb{E} = \mathbb{R}_3[X]$ vu comme un \mathbb{R} - espace vectoriel, on définit sur \mathbb{E} l'application

$$\forall \mathcal{P}, \mathcal{Q} \in \mathbb{E} : h(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) := \int_{-1}^{+1} \mathcal{P}(X) \mathcal{Q}(X) dX.$$

1. Montrer que (\mathbb{E}, h) forme un espace pré - hilbertien réel.
2. Soit le sous espace vectoriel \mathbb{F} de \mathbb{E} définie par

$$\mathbb{F} := \left\{ \mathcal{P} \in \mathbb{E} / \mathcal{P}^{(2)}(0) = 3 \mathcal{P}(0) \right\}.$$

Déterminer une base orthogonale de \mathbb{F} .

Exercice 6.

Soit le \mathbb{R} - espace vectoriel \mathbb{R}^3 , et soit l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définie sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ par

$$\begin{aligned} \forall X, Y \in \mathbb{R}^3 : \langle X, Y \rangle = & 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3 + y_1x_2 + x_1y_2 \\ & + y_1x_3 + x_1y_3 + y_2x_3 + x_2y_3. \end{aligned}$$

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ représente un produit scalaire sur \mathbb{R}^3 .

- Utiliser la procédure d'Orthonormalisation de Gram-Schmidt pour construire une base orthonormée relativement au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ à partir de la base canonique de \mathbb{R}^3 .
- Utiliser la méthode de réduction de Gauss pour déterminer une base orthonormée de \mathbb{R}^3 relativement au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Exercice 7.

Soit \mathbb{R}^4 vu comme un \mathbb{R} - espace vectoriel, et soit l'application $\| \cdot \|$ définie sur \mathbb{R}^4 par

$$\forall X \in \mathbb{R}^4 : \| X \| = \sqrt{3x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_4},$$

et soit les deux sous espaces vectoriel de \mathbb{R}^4

$$\mathbb{F} = \{ X \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 = 0, x_1 + x_4 = 0 \},$$

$$\mathbb{G} = \{ X \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 = 0, x_2 + x_3 + x_4 = 0 \},$$

- Montrer que $\| \cdot \|$ est une norme sur \mathbb{R}^4 .
- Déterminer le produit scalaire associé à la norme $\| \cdot \|$.
- Montrer qu'il existe une projection \mathcal{P} de \mathbb{R}^4 sur \mathbb{F} dirigée par \mathbb{G} .
- Déterminer l'expression de cette projection dans la base canonique de \mathbb{R}^4 .
- Cette projection est - elle orthogonale.

Exercice 8.

Soit le \mathbb{R} - espace vectoriel $\mathbb{E} = \mathbb{R}_2[X]$ munit du produit scalaire canonique

$$\forall p, q \in \mathbb{E} : \langle p, q \rangle = \int_{-1}^{+1} p(x) q(x) dx.$$

Soit les deux sous espace vectoriel de \mathbb{E}

$$\mathbb{F} = \{ p \in \mathbb{E} : p(0) = p^{(1)}(0) \},$$

$$\mathbb{G} = \left\{ p \in \mathbb{E} : \int_0^1 p(x) dx = 0 \right\}.$$

- Montrer qu'il existe
 - Une projection \mathcal{P}_1 de \mathbb{E} sur \mathbb{F} dirigée par \mathbb{G}
 - Une projection \mathcal{P}_2 de \mathbb{E} sur \mathbb{G} dirigée par \mathbb{F} .
- Donner l'expression des deux projection \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 dans la base canonique de \mathbb{E} .
- Ces deux projections sont - elle orthogonale.

Exercice 9.

Soit $\mathbb{E} = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vu comme étant un \mathbb{R} - espace vectoriel et soit les deux sous espaces vectoriels de \mathbb{E} défini par

$$\mathbb{E}_1 = \{ \mathcal{A} \in \mathbb{E} : {}^t\mathcal{A} = \mathcal{A} \}, \quad \mathbb{E}_2 = \{ \mathcal{A} \in \mathbb{E} : {}^t\mathcal{A} = -\mathcal{A} \},$$

On définit l'application

$$\langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle = \text{Tr}({}^t\mathcal{A}\mathcal{B}).$$

- Montrer que $(\mathbb{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace euclidien.
- Déterminer une base de \mathbb{E}_1 et une base de \mathbb{E}_2 .
- Montrer que $\mathbb{E} = \mathbb{E}_1 \oplus \mathbb{E}_2$.
- Montrer qu'il existe une projection P sur \mathbb{E}_1 dirigée par \mathbb{E}_2 .
- Déterminer l'expression de la projection P .
- Cette projection est - elle orthogonale.
- Déterminer la matrice de Gramm associée à la base de \mathbb{E}_1 , et déduire la projection orthogonale de \mathcal{A} sur \mathbb{E}_1 .
- Déterminer la distance entre une matrice $\mathcal{A} \in \mathbb{E}$ et le sous espace vectoriel \mathbb{E}_1 .

Exercices supplémentaires

Exercice 10.

Soit $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que

$$\forall X, Y \in \mathbb{R}^n : {}^t X \mathcal{A} Y = 0.$$

Montrer que $\mathcal{A} = 0$.

Exercice 11.

Soit $\mathbb{R}_2[X]$ vue comme étant un \mathbb{R} - espace vectoriel, soit le produit scalaire

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{+1} p(x) q(x) dx,$$

et soit l'endomorphisme f de $\mathbb{R}_2[X]$ défini par

$$\forall p \in \mathbb{R}_2[X] : f(p) = p(0) + p^{(1)}(0) + \frac{x^2}{2} p^{(2)}(0).$$

1. Montrer que f est un projecteur.
2. Déterminer le sous espace vectoriel sur lequel on fait la projection.
3. Vérifier s'il s'agit d'un projecteur orthogonal ou pas.

Exercice 12.

Soit \mathcal{F} le \mathbb{R} - espace vectoriel des fonctions développable en séries de Fourier sur l'intervalle $[-\pi, +\pi]$, et soit le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini sur \mathcal{F} par

$$\forall f, g \in \mathcal{F} : \langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) g(t) dt.$$

1. Montrer que le couple $(\mathcal{F}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ forme un espace pré - hilbertien réelle.
2. Déterminer une base orthonormée de l'espace \mathcal{F} relativement au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
3. Utiliser l'inégalité de Bessel pour établir l'inégalité de Parseval.

Exercice 13.

Soit $\mathbb{E} := \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vu comme étant un \mathbb{R} - espace vectoriel et soit l'application \mathcal{Q} définie sur \mathbb{E} par

$$\forall \mathcal{A} \in \mathbb{E} : \mathcal{Q}(\mathcal{A}) = \det \mathcal{A}.$$

1. Montrer de deux façons que \mathcal{Q} représente une forme quadratique sur \mathbb{E} .
2. Donner la réduction de sylvestre (en somme des carrée, méthode de Gausse) de la forme \mathcal{Q} .
3. Montrer que le couple $(\mathbb{E}, \mathcal{Q})$ ne forme pas un espace euclidiens.
4. Déterminer une base orthogonale de l'espace \mathbb{E} relativement à la forme \mathcal{Q} .
5. Montrer que le couple $(\mathbb{E}, \mathcal{Q})$ n'admet aucune base orthonormée.

ALGÈBRE IV

Série de Travaux Dirigés Numéro 5

Espaces Préhilbertiens Réels et Espaces Euclidiens (Partie 2)

Responsable du module: M.HOUBAD

14 Avril 2015

Exercice 1.

Soit $\mathbb{E} = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ le \mathbb{R} -espace vectoriel des matrices carrées de taille deux à coefficients dans \mathbb{R} et soit l'application

$$\forall \mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathbb{E} : \langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle = \text{Tr}({}^t \mathcal{A} \mathcal{B}).$$

On considère le sous espace vectoriel \mathbb{F} défini par

$$\mathbb{F} = \{\mathcal{A} \in \mathbb{E} : {}^t \mathcal{A} = \mathcal{A}\}$$

Montrer que

$$\forall \mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathbb{F} : \begin{cases} (\text{Tr}(\mathcal{A} \mathcal{B}))^2 \leq \text{Tr}(\mathcal{A}^2) \text{Tr}(\mathcal{B}^2) \\ \sqrt{\text{Tr}(\mathcal{A}^2 + \mathcal{B}^2 + 2\mathcal{A} \mathcal{B})} \leq \sqrt{\text{Tr}(\mathcal{A}^2)} + \sqrt{\text{Tr}(\mathcal{B}^2)}. \end{cases}$$

Exercice 2.

Soient $\mathbb{E} = \mathbb{R}_2[X]$ vu comme étant un \mathbb{R} -espace vectoriel, le produit scalaire

$$\forall f, g \in \mathbb{E} : \langle f, g \rangle = \int_{-1}^{+1} f(t) g(t) dt,$$

et le sous espace vectoriel

$$\mathbb{F} = \{f \in \mathbb{E} : f(-x) = f(x)\}.$$

1. Déterminer le supplémentaire orthogonal de \mathbb{F} dans \mathbb{E} .
2. On utilisant la matrice de Gram Déterminer la projection orthogonale d'un polynôme quelconque de \mathbb{E} sur \mathbb{F} .

Exercice 3.

On définit la distance entre un vecteur y et un sous espace vectoriel \mathbb{F} par

$$d(y, \mathbb{F}) = \inf_{z \in \mathbb{F}} d(y, z).$$

Soient $(\mathbb{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel, \mathbb{F} un sous espace vectoriel de \mathbb{E} avec $\dim \mathbb{F} < \infty$ et soit \mathcal{P} la projection orthogonale de \mathbb{E} sur \mathbb{F} .

Le but de cet exercice est de montrer que

$$\forall x \in \mathbb{E} : d(x, \mathcal{P}(x)) = \inf_{z \in \mathbb{F}} d(x, z).$$

1. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{E} : x = \underbrace{(x - \mathcal{P}(x))}_{\in \mathbb{F}^\perp = \text{Ker } \mathcal{P}} + \underbrace{\mathcal{P}(x)}_{\in \text{Im } \mathcal{P} = \mathbb{F}}.$$

2. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{E}, \forall z \in \mathbb{F} : \|x - z\|^2 = \|x - \mathcal{P}(x)\|^2 + \|z - \mathcal{P}(x)\|^2.$$

3. En déduire que

$$\forall x \in \mathbb{E} : d(x, \mathcal{P}(x)) \leq \inf_{z \in \mathbb{F}} d(x, z).$$

4. En déduire que

$$\forall x \in \mathbb{E} : d(x, \mathcal{P}(x)) = \inf_{z \in \mathbb{F}} d(x, z).$$

Exercice 4.

Soient $(\mathbb{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien, \mathbb{F} un sous espace vectoriel de \mathbb{E} et $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_p\}$ une base orthonormée de \mathbb{F} .

On considère \mathcal{P} la projection orthogonale de \mathbb{E} sur \mathbb{F} .

1. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{E} : \|x\|^2 = \|\mathcal{P}(x)\|^2 + \|x - \mathcal{P}(x)\|^2.$$

2. En déduire que

$$\forall x \in \mathbb{E} : d(x, \mathbb{F})^2 = \|x\|^2 - \|\mathcal{P}(x)\|^2.$$

3. Déduire que

$$\forall x \in \mathbb{E}, \forall k = 1 \dots p : \langle v_k, x \rangle = \langle v_k, \mathcal{P}(x) \rangle.$$

4. Montrer que

$$G(v_1, \dots, v_p, x) = \begin{pmatrix} \boxed{G(v_1, \dots, v_p)} & \begin{matrix} \langle v_1, \mathcal{P}(x) \rangle \\ \vdots \\ \langle v_p, \mathcal{P}(x) \rangle \end{matrix} \\ \langle v_1, \mathcal{P}(x) \rangle \dots \langle v_p, \mathcal{P}(x) \rangle & d(x, \mathbb{F})^2 + \|\mathcal{P}(x)\|^2 \end{pmatrix}$$

5. On déduire que

$$d(x, \mathbb{F}) = \sqrt{g(v_1, \dots, v_n, x)}.$$

ALGÈBRE IV

Série de Travaux Dirigés Numéro 6

Espaces Préhilbertiens Réels et Espaces Euclidiens (Partie 3)

Responsable du module: M.HOUBAD

30 Avril 2015

Exercice 1.

Soient $(\mathbb{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien, $f, g \in \text{End}(\mathbb{E})$, f^* c'est l'adjoint de f , g^* c'est l'adjoint de g et $\lambda \in \mathbb{R}$.
Montrer que

$$\begin{aligned}f^{**} &= f, \quad \text{Id}^* = \text{Id} \\(f + g)^* &= f^* + g^*, \quad (\lambda f)^* = \lambda f^* \\(f \circ g)^* &= g^* \circ f^*, \\ \text{rg } f^* &= \text{rg } f, \quad \det f^* = \det f.\end{aligned}$$

Exercice 2.

Soit $\mathbb{E} = \mathbb{R}_2[X]$ un \mathbb{R} - espace vectoriel munit du produit scalaire

$$\forall p, q \in \mathbb{E} : \quad \langle p, q \rangle = \int_{-1}^{+1} p(x)q(x)dx.$$

On considère l'endomorphisme f de \mathbb{E} défini par

$$\forall p \in \mathbb{E} : \quad f(p) = q, \quad \forall x \in \mathbb{R} : \quad q(x) = p(x) + \left(\int_0^1 p(t)dt \right) x^2 + \left(\int_{-1}^0 p(t)dt \right) x.$$

1. Déterminer l'adjoint de l'endomorphisme f .
2. Déterminer p tel que

$$\forall q \in \mathbb{E} : \quad \langle f(p), q \rangle = 0.$$

Exercice 3.

Soit \mathbb{R}^3 un \mathbb{R} - espace vectoriel munit du produit scalaire canonique et soit l'endomorphisme f définie par

$$f(X) = \begin{pmatrix} 4x + y + z \\ x + 4y - z \\ x - y + 4z \end{pmatrix}$$

1. Montrer que f est diagonalisable.
2. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f .
3. Déterminer une base orthonormée de \mathbb{R}^3 formée par les vecteurs propres de f .

Exercice 4.

Soit $\mathbb{E} = \mathbb{R}_3[X]$ un \mathbb{R} - espace vectoriel munit du produit scalaire

$$\forall p, q \in \mathbb{E} : \quad \langle p, q \rangle = \int_{-1}^{+1} p(x)q(x)dx.$$

et soit l'endomorphisme f définie par

$$\forall p \in \mathbb{E} : \quad f(p) = q,$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad q(x) = 2p(x) + \frac{1}{2}p^{(2)}(0)(x+1) + p^{(1)}(0)(x^2-1) + p(0)(x^2-x).$$

1. Montrer que f est diagonalisable.

2. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f .
3. Déterminer une base orthonormée de \mathbb{E} formée par les vecteurs propres de f .
4. l'endomorphisme f est-il orthogonal.

Exercice 5.

Soit $(\mathbb{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien, a un vecteur unitaire de \mathbb{E} et $k \in \mathbb{R}$, on définit l'endomorphisme f par

$$\forall x \in \mathbb{E} : f(x) = x + k \langle x, a \rangle a.$$

Montrer que f est auto-adjoint.