République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l' Enseignement Supérieure et de la Recherche Scientifique
École Preparatoire en Sciences et Techniques
Tlemcen
Département des Mathématiques

ÉPREUVE FINAL DU PREMIER SEMESTRE

Module: Algèbre III | Responsable: M.HOUBAD
Date: 28 - 01 - 2014 | Année: 2013 - 2014
Coefficent: 3 | Durée: $2h00$

Exercice 1 (06 pts).
Soit la matrice

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} .$$

1. Résoudre l'équation différentielle suivante.
$$\frac{d}{d\,t} X = \mathcal{B}\, X .$$
2. Soit $\mathcal{Q}$ un polynôme quelconque tel que $\mathcal{Q}(2) \neq 0$, montrer que
$$\operatorname{Ker} \mathcal{Q}(\mathcal{B}) = \{ 0 \} .$$

Exercice 2 (14 pts).
Soit la matrice

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} .$$

On veut déterminer le terme générale de la suite définie par

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^* : \quad X_n = \mathcal{A}\, X_{n-1} , \quad X_0 \in \mathbb{R}^4 .$$

1. Montrer que le polynôme caractéristique de la matrice $\mathcal{A}$ vaut
$$P_{\mathcal{A}}(\lambda) = (2 - \lambda)^2 (4 - \lambda)^2 .$$
2. Déterminer les sous espaces propres de $\mathcal{A}$.
3. On utilisant la réduction de Jordan déterminer la matrice réduite $\mathcal{A}'$ de la matrice $\mathcal{A}$.
4. Déterminer une matrice de passage correspondante à cette réduction.
5. Déterminer le terme général de la suite vectoriel définie par
$$\forall\, n \in \mathbb{N}^* : \quad Y_n = \mathcal{A}'\, Y_{n-1} , \quad Y_0 \in \mathbb{R}^4 .$$
6. Déduire le terme général de la suite X_n en fonction de Y_n.
7. On ce justifiant, déduire une base pour chaqu'un des sous espaces vectoriel suivant
$$\operatorname{Ker} (\mathcal{A} - 2)^2 , \quad \operatorname{Ker} (\mathcal{A} - 4)^2 .$$
8. Montrer qu'il existe deux uniques suites vectoriels $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^4$ vérifiant
$$\forall\, n \in \mathbb{N}^* : \quad X_n = Z_n + W_n , \quad (\mathcal{A} - 2)^2 Z_n = 0 , \quad (\mathcal{A} - 4)^2 W_n = 0 .$$
9. Montrer que les deux suites $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant
$$\forall\, n \in \mathbb{N}^* : \quad Z_n = \mathcal{A}\, Z_{n-1} , \quad W_n = \mathcal{A}\, W_{n-1} .$$

BP 165 RP, Bel Horizon, Tlemcen DZ - 13000, Algérie. Tél.+213(0)43 204 135. Fax. +213(0)43 201 824. www.epst-tlemcen.dz
mail to : m.houbad@gmail.com

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l' Enseignement Supérieure et de la Recherche Scientifique

École Preparatoire en Sciences et Techniques

T l e m c e n

Département des Mathématiques

ÉPREUVE FINAL DU PREMIER SEMESTRE

Module: Algèbre III	Responsable: M.HOUBAD
Date: 28 - 01 - 2014	Année: 2013 - 2014
Coefficent: 3	Durée: $2h00$

Exercice 1 (06 pts).

Remarque 1.
Dans le cas ou l'étudiant fait les deux méthodes, une seul seras comptabilisé (Par défaut Dunford).

Soit la matrice

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} .$$

I). Résolution de l'équation différentielle.

1. Méthode 1 : En Utilisant la Décompensation de Dunford :

0.5pt Dans un premier temps

$$\frac{d}{d\,t} X = \mathcal{B}\, X \Longrightarrow X = e^{\mathcal{B}\,t}\, C , \quad C \in \mathbb{R}^3 .$$

0.5pt Le polynôme caractéristique vaut

$$P_{\mathcal{B}}(\lambda) = (2 - \lambda)^3 .$$

1pt (a) Décomposition de Dunford

$$\mathcal{A} = 2\,\mathrm{I} + N , \quad N = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

avec N une matrice nilpotente.

(b) L'exponentiel de la matrice :

0.5pt On a

$$e^{\mathcal{B}\,t} = e^{2\,t\,\mathrm{I}}\, e^{N\,t} = e^{2\,t} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{N^k\, t^k}{k!} .$$

1pt or N est nilpotente donc $N^3 = 0$ ce qui donne que

$$e^{\mathcal{B}\,t} = e^{2\,t} \sum_{k=0}^{2} \frac{N^k\, t^k}{k!} .$$

1pt et par calcul on a $N^2 = 0$ donc

$$e^{\mathcal{B}\,t} = e^{2\,t\,\mathrm{I}}\, e^{N\,t} = e^{2\,t} \Big[\mathrm{I} + N\,t \Big] , \quad N = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

0.5pt (c) La solution voulu

$$X = e^{2\,t} \Big[\mathrm{I} + N\,t \Big]\, C , \quad N = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad C \in \mathbb{R}^3 .$$

0.5pt

2. Méthode 2 : La trigonalisation

Le polynôme caractéristique vaut

$$P_{\mathcal{B}}(\ \lambda\ )\ =\ (\ 2\ -\ \lambda\ )^3\ .$$

1pt

(a) Les vecteurs propres

$$\mathbb{E}_2\ =\ \text{Vect}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

0.5pt

(b) La matrice réduite et la matrice de passage.

$$\mathcal{A}'\ =\ \begin{pmatrix} 2 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad P\ =\ \left(\begin{array}{c|c|c} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \right),$$

0.5pt

Ce qui donne le système

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \mathcal{A}\, v_1 & = & 2\, v_1 \\ \mathcal{A}\, v_2 & = & a\, v_1\ +\ 2\, v_2 \\ \mathcal{A}\, v_3 & = & b\, v_1\ +\ c\, v_2\ +\ 2\, v_3 \end{array} \right.$$

1pt

La résolution de ce système permet de conclure que

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1\ =\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \\ v_2\ =\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a = 0, \\ \\ v_3\ =\ \begin{pmatrix} y\ +\ b \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (y,z)\ \text{quelconque et}\ (b,c)\ \in\ \mathbb{R}^2\ \text{tel que}\ \det P\ \neq\ 0, \end{array} \right.$$

0.5pt

Finalement

$$\mathcal{A}'\ =\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad P\ =\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

0.5pt

(c) La résolution du système réduit

$$\frac{d}{dt}\, Y\ =\ \mathcal{A}'\, Y \Longrightarrow Y\ =\ \begin{pmatrix} \alpha\, t\ +\ \beta \\ \gamma \\ \alpha \end{pmatrix} e^{2\,t}, \quad (\ \alpha\ ,\ \beta\ ,\ \gamma\ )\ \in\ \mathbb{R}^3\ .$$

0.5pt

(d) La solution voulu

$$X\ =\ P\, Y \Longrightarrow X\ =\ \begin{pmatrix} \alpha\, t\ +\ \beta\ +\ \alpha \\ \alpha\, t\ +\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} e^{2\,t}, \quad (\ \alpha\ ,\ \beta\ ,\ \gamma\ )\ \in\ \mathbb{R}^3\ .$$

2pt

II). Soit $\mathcal{Q}$ un polynôme quelconque tel que $\mathcal{Q}(\ 2\ ) \neq 0$, montrer que

$$\text{Ker}\ \mathcal{Q}(\ \mathcal{B}\ )\ =\ \{\ 0\ \}\ .$$

Le polynôme caractéristique est annulateur de $\mathcal{B}$ donc

$$\mathbb{R}^3\ =\ \text{Ker}\ (\ 2\,\text{I}\ -\ \mathcal{B}\ )^3 \Longrightarrow \dim\text{Ker}\ (\ 2\,\text{I}\ -\ \mathcal{B}\ )^3\ =\ 3\ .$$

Le polynôme suivant

$$\mathcal{H}(\ x\ )\ =\ \mathcal{Q}(\ x\ )\ \mathcal{P}_{\mathcal{B}}(\ x\ ),$$

est annulateur de $\mathcal{B}$ et les deux polynôme $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{P}_{\mathcal{B}}$ sont premier entre eux donc on applique le Lemme de décomposition des noyaux on a

$$\mathbb{R}^3\ =\ \text{Ker}\ \mathcal{Q}(\ \mathcal{B}\ )\ \oplus\ \text{Ker}\ (\ 2\,\text{I}\ -\ \mathcal{B}\ )^3 \Longrightarrow \dim\text{Ker}\ \mathcal{Q}(\ \mathcal{B}\ )\ +\ \dim\text{Ker}\ (\ 2\,\text{I}\ -\ \mathcal{B}\ )^3\ =\ 3\ .$$

on conclut alors que

$$\dim\text{Ker}\ \mathcal{Q}(\ \mathcal{B}\ )\ =\ 0 \Longrightarrow \text{Ker}\ \mathcal{Q}(\ \mathcal{B}\ )\ =\ \{\ 0\ \}\ .$$

Exercice 2 (14 pts).
Soit la matrice

$$\mathcal{A} \; = \; \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} .$$

On veut déterminer le terme générale de la suite définie par

$$\forall \, n \; \in \; \mathbb{N}^* \; : \quad X_n \; = \; \mathcal{A} \, X_{n-1} \; , \quad X_0 \in \mathbb{R}^4 \; .$$

1pt

1. Le polynôme caractéristique de la matrice $\mathcal{A}$ vaut

$$P_{\mathcal{A}}(\, \lambda \,) \; = \; (\, 2 \; - \; \lambda \,)^2 \, (\, 4 \; - \; \lambda \,)^2 \; .$$

1pt

2. Détermination les sous espaces propres de $\mathcal{A}$.

$$\mathbb{E}_2 \; = \; \text{Vect} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \; , \quad \mathbb{E}_2 \; = \; \text{Vect} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \; ,$$

1.5pt

3. La matrice réduite de Jordan $\mathcal{A}'$ de la matrice $\mathcal{A}$.

$$\mathcal{A}' \; = \; \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} .$$

Vu que

$$\dim \mathbb{E}_2 \; = \; 1 \; , \quad \dim \mathbb{E}_4 \; = \; 1 \; ,$$

alors la réduction de Jordan de la matrice $\mathcal{A}$ est formée par deux bloc de Jordan le premier pour la valeur propre 2 et le deuxième pour la valeur propre 4, les deux sont de taille 2. Ce qui donne que

2pt

4. Une matrice de passage correspondante à cette réduction..
La réduction de Jordan précédemment mentionnée ce trouve réaliser dans une base

$$\{ \, v_1 \; , \; v_2 \; , \; v_3 \; , \; v_4 \, \} \; ,$$

de $\mathbb{R}^4$, ce qui donne le système suivant

$$\begin{cases} \mathcal{A} \, v_1 & = & 2 \, v_1 \\ \mathcal{A} \, v_2 & = & v_1 \; + \; 2 \, v_2 \\ \mathcal{A} \, v_3 & = & 4 \, v_3 \\ \mathcal{A} \, v_4 & = & v_3 \; + \; 4 \, v_4 \end{cases} ,$$

La résolution de ce système permet d'avoir

$$P \; = \; \left(\begin{array}{c|c|c|c} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \right) \; = \; \begin{pmatrix} 1 & -5/2 & 1 & -1/2 \\ 1 & 0 & -2 & -1/2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

5. Détermination du terme général de la suite vectoriel définie par

$$\forall \, n \; \in \; \mathbb{N}^* \; : \quad Y_n \; = \; \mathcal{A}' \, Y_{n-1} \; , \quad Y_0 \; \in \; \mathbb{R}^4 \; .$$

0.5pt

Ce qui donne que

$$\forall \, n \; \in \; \mathbb{N}^* \; : \quad Y_n \; = \; \mathcal{A}'^n \, Y_0 \; .$$

0.5pt On applique la décomposition de Dunford de la matrice $\mathcal{A}'$ on a

$$\mathcal{A}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}}_{\mathcal{D}'} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathcal{N}'}$$

0.5pt La formule du binôme de Newton donne

$$\mathcal{A}'^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, \mathcal{D}'^{n-k} \, \mathcal{N}'^k .$$

0.5pt La matrice $\mathcal{N}'$ est nilpotente formée par deux blocs de Jordan de taille deux donc $\mathcal{N}'^2 = 0$, alors

$$\mathcal{A}'^n = \sum_{k=1}^{n} C_n^k \, \mathcal{D}'^{n-k} \, \mathcal{N}'^k = \mathcal{D}'^n + n \, \mathcal{D}'^{n-1} \, \mathcal{N}' .$$

0.5pt Finalement

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_n = \left[\mathcal{D}'^n + n \, \mathcal{D}'^{n-1} \, \mathcal{N}' \right] Y_0 \\[2ex] \mathcal{D}' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} , \quad \mathcal{N}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \end{array} \right.$$

1.5pt 6. Déduction du terme général de la suite X_n en fonction de Y_n.
On a

$$X_n = \mathcal{A} \, X_{n-1} = P \, \mathcal{A}' \, P^{-1} \, X_{n-1} \Longrightarrow P^{-1} \, X_n = \mathcal{A}' \, P^{-1} \, X_{n-1}$$

donc

$$Y_n = P^{-1} \, X_n \Longrightarrow X_n = P \, Y_n .$$

2pt 7. Déduction d'une base pour chaqu'un des sous espaces vectoriel suivant

$$\mathcal{N}_2 = \mathrm{Ker} \, (\mathcal{A} - 2)^2 , \quad \mathcal{N}_4 = \mathrm{Ker} \, (\mathcal{A} - 4)^2 .$$

on a le système de détermination de la matrice de passage pour la réduction de Jordan suivant

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \mathcal{A} \, v_1 & = & 2 \, v_1 \\ \mathcal{A} \, v_2 & = & v_1 + 2 \, v_2 \\ \mathcal{A} \, v_3 & = & 4 \, v_3 \\ \mathcal{A} \, v_4 & = & v_3 + 4 \, v_4 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (\mathcal{A} - 2 \, \mathrm{I}) \, v_1 = 0 \\ (\mathcal{A} - 2 \, \mathrm{I}) \, v_2 = v_1 \\ (\mathcal{A} - 4 \, \mathrm{I}) \, v_3 = 0 \\ (\mathcal{A} - 4 \, \mathrm{I}) \, v_4 = v_3 \end{array} \right. ,$$

Ce qui donne que

$$\left\{ \begin{array}{c} (\mathcal{A} - 2 \, \mathrm{I})^2 \, v_1 = 0 \\ (\mathcal{A} - 2 \, \mathrm{I})^2 \, v_2 = (\mathcal{A} - 2 \, \mathrm{I}) \, v_1 = 0 \\ (\mathcal{A} - 4 \, \mathrm{I})^2 \, v_3 = 0 \\ (\mathcal{A} - 4 \, \mathrm{I})^2 \, v_4 = (\mathcal{A} - 4 \, \mathrm{I}) \, v_3 = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} v_1 , \, v_2 \in \mathcal{N}_2 , \\ v_3 , \, v_4 \in \mathcal{N}_4 , \end{array} \right.$$

Vu que les vecteurs v_i sont linéairement indépendant et que la

$$\dim \mathcal{N}_\lambda = \mathrm{mul}(\lambda) ,$$

alors

$$\mathcal{N}_2 = \mathrm{vect} \, \langle \, v_1 \, , \, v_2 \, \rangle , \quad \mathcal{N}_4 = \mathrm{vect} \, \langle \, v_3 \, , \, v_4 \, \rangle ,$$

`1.5pt` 8. L' existence et unicité des deux suites vectoriels $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^4$..
On a
$$\mathbb{R}^4 = \mathcal{N}_2 \oplus \mathcal{N}_4 ,$$
donc il existe deux unique vecteurs Z_n de $\mathcal{N}_2$ et W_n de $\mathcal{N}_4$ tel que
$$X_n = Z_n + W_n ,$$
et vu que $z_n \in \mathcal{N}_2$ et $W_n \in \mathcal{N}_4$ alors
$$(\mathcal{A} - 2)^2 Z_n = 0 , \quad (\mathcal{A} - 4)^2 W_n = 0 .$$

`1.5pt` 9. On montre que les deux suites $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant
$$\forall\, n \in \mathbb{N}^* : \quad Z_n = \mathcal{A}\, Z_{n-1} , \quad W_n = \mathcal{A}\, W_{n-1} .$$
On a
$$X_n = Z_n + W_n , \quad X_n = \mathcal{A}\, X_{n-1} ,$$
donc
$$Z_n + W_n = \mathcal{A}\, Z_{n-1} + \mathcal{A}\, W_{n-1} \Longrightarrow Z_n - \mathcal{A}\, Z_{n-1} = - W_n + \mathcal{A}\, W_{n-1}$$
vu $\mathcal{A}$ est stable sur les sous espaces caractéristiques et que $Z_n \in \mathcal{N}_2$ et $W_n \in \mathcal{N}_4$ donc
$$Z_n - \mathcal{A}\, Z_{n-1} \in \mathcal{N}_2 , \quad - W_n + \mathcal{A}\, W_{n-1} \in \mathcal{N}_4 ,$$
or
$$\mathbb{R}^4 = \mathcal{N}_2 \oplus \mathcal{N}_4 \Longrightarrow \mathcal{N}_2 \cap \mathcal{N}_4 = \{ 0 \} ,$$
ce qui permet de conclure que
$$\left\{ \begin{array}{l} Z_n - \mathcal{A}\, Z_{n-1} = 0 , \\ \\ - W_n + \mathcal{A}\, W_{n-1} = 0 , \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} Z_n = \mathcal{A}\, Z_{n-1} , \\ \\ W_n = \mathcal{A}\, W_{n-1} . \end{array} \right.$$

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l' Enseignement Supérieure et de la Recherche Scientifique
École Preparatoire en Sciences et Techniques
Tlemcen
Département des Mathématiques

ÉPREUVE FINAL DU DEUXIÈME SEMESTRE

Module: Algèbre III	Responsable: M.HOUBAD
Date: 11 - 05 - 2014	Année: 2013 - 2014
Coefficent: 3	Durée: $2h00$

Exercice 1 (05 pts).

Soit $\mathbb{E} = \mathbb{R}^4$ vu comme étant un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel, soit $\langle \cdot , \cdot \rangle$ le produit scalire canonique de $\mathbb{R}^4$ défini par

$$\langle X , Y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4 ,$$

et soit la famille

$$\left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} , v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} .$$

1. Donner la matrice de Gram associée à la famille $\{ v_1 , v_2 , v_3 \}$.
2. En utilisant la déterminant de Gram montrer que cette famille est libre.
3. Donner une base orthonormée du sous espace vectoriel définit par
$$\mathbb{F} = \text{Vect} \langle v_1 , v_2 , v_3 \rangle .$$
4. En utilisant la matrice de Gram déterminer la projection orthogonale sur $\mathbb{F}$ du vecteur $X \in \mathbb{E}$

Exercice 2 (15 pts).

Soit $\mathbb{E} = \mathbb{R}_2[X]$ vu comme étant un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel, et soit l'application

$$\forall p , q \in \mathbb{E} : \quad \langle p , q \rangle = p(1) q(1) + p^{(1)}(1) q^{(1)}(1) + p^{(2)}(1) q^{(2)}(1) ,$$

et on considère les deux sous espace vectoriel de $\mathbb{E}$

$$\mathbb{F} = \text{Vect} \left\langle x^2 + x + 2 , x^2 + 1 \right\rangle , \quad \mathbb{G} = \text{Vect} \left\langle (x + 1)^2 \right\rangle .$$

1. Montrer que $\langle \cdot , \cdot \rangle$ représent un produit scalaire sur $\mathbb{E}$.
2. Déduire que ($\mathbb{E}$, $\langle \cdot , \cdot \rangle$) représente un espace euclidien.
3. Montrer qu'il existe une projection de $\mathbb{E}$ sur $\mathbb{F}$ dirigée par $\mathbb{G}$.
4. Donner l'expression de cette projection dans la base canonique de $\mathbb{E}$.
5. Cette projection est - elle orthogonale ?
6. Donner la projection sur $\mathbb{F}$ du polynôme p définit par
$$p(x) = x^2 + x \int_0^1 p(t) \, dt .$$
7. Existe t-il une base une base orthonormée de $\mathbb{E}$ formée par une base de $\mathbb{F}$ et une autre de $\mathbb{G}$.
8. Donner l'adjoint de l'endomorphisme f définie par
$$\forall p \in \mathbb{E} : \quad f(p) = q$$
tel que
$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad q(x) = p(0) x + \left(\int_0^1 p(t) \, dt \right) (x^2 + 1) .$$

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l' Enseignement Supérieure et de la Recherche Scientifique

École Preparatoire en Sciences et Techniques

Tlemcen

Département des Mathématiques

SOLUTION DE L'ÉPREUVE FINAL DU DEUXIÈME SEMESTRE

Module: Algèbre III — Responsable: M.HOUBAD

Date: 11 - 05 - 2014 — Année: 2013 - 2014

Coefficent: 3 — Durée: $2h00$

Exercice 1 (05 pts).

Soit $\mathbb{E} = \mathbb{R}^4$ vu comme étant un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel, soit $\langle \cdot , \cdot \rangle$ le produit scalire canonique de $\mathbb{R}^4$ défini par

$$\langle X , Y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4 ,$$

et soit la famille

$$\left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} , v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} .$$

0.5 pt

1. La matrice de Gram associée à la famille $\{ v_1 , v_2 , v_3 \}$.

$$G(v_1 , v_2 , v_3) = \begin{pmatrix} \langle v_1 , v_1 \rangle & \langle v_1 , v_2 \rangle & \langle v_1 , v_3 \rangle \\ \langle v_2 , v_1 \rangle & \langle v_2 , v_2 \rangle & \langle v_2 , v_3 \rangle \\ \langle v_3 , v_1 \rangle & \langle v_3 , v_2 \rangle & \langle v_3 , v_3 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} .$$

0.5 pt

2. Cette famille est libre car

$$g(v_1 , v_2 , v_3) = \det G(v_1 , v_2 , v_3) = 9 \neq 0 .$$

3 pt

3. Une base orthonormée du sous espace vectoriel définit par

$$\mathbb{F} = \text{Vect} \langle v_1 , v_2 , v_3 \rangle .$$

On utilise la procédure d'orthonormalisation de Gram-Schmidth

– Étape d'orthogonalisation :

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = v_1 \\ \varepsilon_2 = v_2 + \alpha \, \varepsilon_1 \\ \varepsilon_3 = v_3 + \beta \, \varepsilon_1 + \gamma \, \varepsilon_2 \end{cases} , \quad \begin{cases} \langle \varepsilon_2 , \varepsilon_1 \rangle = 0 \\ \langle \varepsilon_3 , \varepsilon_1 \rangle = 0 \\ \langle \varepsilon_3 , \varepsilon_2 \rangle = 0 \end{cases}$$

ce qui donne que

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} , \quad \varepsilon_3 = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 3 \\ -12 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix}$$

– Étape de normalisation :

$$\forall \, i = 1 , 2 , 3 : \quad \varphi_i = \frac{\varepsilon_i}{|| \ \varepsilon_i \ ||}$$

$$\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad \varphi_2 = \frac{3}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} , \quad \varphi_3 = \frac{15}{3\sqrt{35}} \begin{pmatrix} 3 \\ -12 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix}$$

– Conclusion : La famille

$$\{ \varphi_1 , \varphi_2 , \varphi_3 \} ,$$

est orthonormée.

$\boxed{\texttt{1 pt}}$ 4. La projection orthogonale sur $\mathbb{F}$ du vecteur $X \in \mathbb{E}$.

$$P(\, X \,) \;=\; \alpha\, v_1 \;+\; \beta\, v_2 \;+\; \gamma\, v_3$$

tel que

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \;=\; G(\, v_1 \,,\; v_2 \,,\; v_3 \,)^{-\,1} \begin{pmatrix} \langle\, X \,,\; v_1 \,\rangle \\ \langle\, X \,,\; v_2 \,\rangle \\ \langle\, X \,,\; v_3 \,\rangle \end{pmatrix} \,.$$

Exercice 2 (15 pts).

Soit $\mathbb{E} \;=\; \mathbb{R}_2[\, X \,]$ vu comme étant un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel, et soit l'application

$$\forall\, p \,,\; q \;\in\; \mathbb{E} \;:\quad \langle\, p \,,\; q \,\rangle \;=\; p(\,1\,)\, q(\,1\,) \;+\; p^{(\,1\,)}(\,1\,)\, q^{(\,1\,)}(\,1\,) \;+\; p^{(\,2\,)}(\,1\,)\, q^{(\,2\,)}(\,1\,) \,,$$

et on considère les deux sous espace vectoriel de $\mathbb{E}$

$$\mathbb{F} \;=\; \text{Vect}\,\Big\langle\, x^2 \;+\; x \;+\; 2 \,,\; x^2 \;+\; 1 \,\Big\rangle \,, \quad \mathbb{G} \;=\; \text{Vect}\,\Big\langle\, (\, x \;+\; 1\,)^2 \,\Big\rangle \,.$$

1. $\langle\, \cdot \,,\; \cdot \,\rangle$ représent un produit scalaire sur $\mathbb{E}$: On a

$\boxed{\texttt{1 pt}}$ (a) $\langle\, \cdot \,,\; \cdot \,\rangle$ Symétrique car

$$\langle\, p \,,\; q \,\rangle \;=\; \langle\, q \,,\; p \,\rangle \,.$$

$\boxed{\texttt{1 pt}}$ (b) $\langle\, \cdot \,,\; \cdot \,\rangle$ Bilinéaire car on a la symétrie de $\langle\, \cdot \,,\; \cdot \,\rangle$ et

$$\langle\, \lambda\, p_1 \;+\; \mu\, p_2 \,,\; q \,\rangle \;=\; \lambda\, \langle\, p_1 \,,\; q \,\rangle + \;\mu\, \langle\, p_2 \,,\; q \,\rangle \,,$$

$\boxed{\texttt{1.5 pt}}$ (c) $\langle\, \cdot \,,\; \cdot \,\rangle$ Définie positive car

$$\langle\, p \,,\; p \,\rangle \;=\; (\, p(\,1\,)\,)^2 \;+\; \Big(\, p^{(\,1\,)}(\,1\,) \,\Big)^2 \;+\; \Big(\, p^{(\,2\,)}(\,1\,) \,\Big)^2 \,,$$

donc

$$\forall\, p \;\in\; \mathbb{E} \;:\quad \langle\, p \,,\; p \,\rangle \;\geq\; 0 \,,$$

et

$$\langle\, p \,,\; p \,\rangle \;=\; 0 \;\iff\; p(\,1\,) \;=\; p^{(\,1\,)}(\,1\,) \;=\; p^{(\,2\,)}(\,1\,) \;=\; 0 \,,$$

or

$$p(x) \;=\; p(\,1\,) \;+\; p^{(\,1\,)}(\,1\,)\,(\, x \;-\; 1\,) \;+\; \frac{1}{2}\, p^{(\,2\,)}\,(\,1\,)\,(\, x \;-\; 1\,)^2 \,,$$

finalement

$$\forall\, x \;\in\; \mathbb{R} \;:\quad p(\, x \,) \;=\; 0 \,.$$

$\boxed{\texttt{1 pt}}$ 2. ($\mathbb{E}$, $\langle\, \cdot \,,\; \cdot \,\rangle$) représente un espace euclidien car c'est un espace de dimension finie qui vaut 3 munit d'un produit scalaire.

$\boxed{\texttt{2 pt}}$ 3. Existence d'une projection de $\mathbb{E}$ sur $\mathbb{F}$ dirigée par $\mathbb{G}$.

(a) La famille $\Big\{\, x^2 \;+\; x \;+\; 2 \,,\; x^2 \;+\; 1 \,\Big\}$ est une base de $\mathbb{F}$.

(b) La famille $\Big\{\, (\, x \;+\; 1\,)^2 \,\Big\}$ est une base de $\mathbb{G}$.

(c) La famille $\Big\{\, x^2 \;+\; x \;+\; 2 \,,\; x^2 \;+\; 1 \,\Big\} \,\cup\, \Big\{\, (\, x \;+\; 1\,)^2 \,\Big\}$ qui vaut

$$\Big\{\, x^2 \;+\; x \;+\; 2 \,,\; x^2 \;+\; 2 \,,\; x^2 \;+\; 2\, x \;+\; 1 \,\Big\} \,,$$

est une base de $\mathbb{E}$ car

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \;=\; 2 \;\neq\; 0 \,.$$

vu (a), (b) et (c) on conclut que

$$\mathbb{E} \;=\; \mathbb{F} \,\oplus\, \mathbb{G} \,,$$

ce qui donne l'existence d'une projection sur $\mathbb{F}$ dirigée par $\mathbb{G}$.

$\boxed{\texttt{2 pt}}$ 4. L'expression de cette projection dans la base canonique de $\mathbb{E}$.
Dans la suite on note cette projection par $\mathcal{K}$

$$\begin{cases} \forall\, p \in \mathbb{E}\,,\ \exists\,(a\,,\,b\,,\,c) \in \mathbb{R}^3\,,\ \exists\,(\alpha\,,\,\beta\,,\,\gamma) \in \mathbb{R}^3\ : \\ p(x) = a\,x^2 + b\,x + c = \alpha\,(x^2 + x + 2) + \beta\,(x^2 + 2) + \gamma\,(x^2 + 2\,x + 1) \end{cases}$$

donc

$$\mathcal{K}(p) = \alpha\,(x^2 + x + 2) + \beta\,(x^2 + 2)\,,$$

or

$$\begin{cases} a = \alpha + \beta + \gamma \\ b = \alpha + 2\,\gamma \\ c = 2\,\alpha + 2\,\beta + \gamma \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha = c - a \\ \beta = \dfrac{3}{2}\,a - \dfrac{1}{2}\,b - \dfrac{1}{2}\,c \end{cases}$$

ce qui donne

$$\mathcal{K}(p) = (c - a)\,(x^2 + x + 2) + \left(\frac{3}{2}\,a - \frac{1}{2}\,b - \frac{1}{2}\,c\right)(x^2 + 2)\,,$$

$\boxed{\texttt{1.5 pt}}$ 5. Cette projection est - elle orthogonale ?

$$\left\langle x^2 + x + 2\,,\,2\,x + 1 \right\rangle = 18 \neq 0\,,$$

donc

$$\mathbb{F} \not\perp \mathbb{G}\,,$$

et alors cette projection n'est pas orthogonale

$\boxed{\texttt{2 pt}}$ 6. La projection sur $\mathbb{F}$ du polynôme p définit par

$$p(x) = x^2 + x\int_0^1 p(t)\,dt \Longrightarrow p(x) = x^2 + \frac{2}{3}\,x\,,$$

donc

$$\mathcal{K}(p) = \frac{1}{6}\,x^2 - x + \frac{1}{3}\,.$$

$\boxed{\texttt{1 pt}}$ 7. Existence d'une base orthonormée de $\mathbb{E}$ formée par une base de $\mathbb{F}$ et une autre de $\mathbb{G}$:
Ce type de base n'existe pas car d'aprés le résultat de la question 8) $\mathbb{F}$ n'est pas orthogonale à $\mathbb{G}$.

$\boxed{\texttt{2 pt}}$ 8. L'adjoint de l'endomorphisme f définie par

$$\forall\, p \in \mathbb{E}\ :\quad f(p) = q$$

tel que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\ :\quad q(x) = p(0)\,x + \left(\int_0^1 p(t)\,dt\right)(x^2 + 1)\,.$$

Soit $\{\,1\,,\,x\,,\,x^2\,\}$ la base canonique de $\mathbb{E}$, on applique la procédure de Gram-Schimdth à cette base on obtient la base orthonormée suivante

$$\mathcal{B} = \left\{1\,,\ x - 1\,,\ \frac{1}{2}\,x^2 - x + \frac{1}{2}\right\}\,,$$

le calcule fournit

$$\begin{cases} f(1) = x^2 + x + 1 = -\,3 + 3\,(x - 1) + 2\left(\dfrac{1}{2}\,x^2 + \dfrac{3}{2}\,x\right) \\ f(x - 1) = -\dfrac{1}{2}\,x^2 + -\dfrac{3}{2}\,x = -\,2 - \dfrac{5}{2}\,(x - 1) - \left(\dfrac{1}{2}\,x^2 + \dfrac{3}{2}\,x\right) \\ f\left(\dfrac{1}{2}\,x^2 - x + \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}\,x^2 + \dfrac{3}{2}\,x = 2 + \dfrac{5}{2}\,(x - 1) + \left(\dfrac{1}{2}\,x^2 + \dfrac{3}{2}\,x\right) \end{cases}$$

donc

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -\,3 & -\,2 & 2 \\ 3 & -\dfrac{5}{2} & \dfrac{5}{2} \\ 2 & -\,1 & 1 \end{pmatrix}\,,$$

et donc

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\ f^*\ ) \ = \ {}^t\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\ f\ ) \ = \ \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ & & \\ -2 & -\dfrac{5}{2} & -1 \\ & & \\ 2 & \dfrac{5}{2} & 1 \end{pmatrix} .$$

BP 165 RP, Bel Horizon, Tlemcen DZ - 13000, Algérie. Tél.+213(0)43 204 135. Fax. +213(0)43 201 824.
www.epst-tlemcen.dz
mail to : m.houbad@gmail.com