République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l' Enseignement Supérieure et de la Recherche Scientifique
École Preparatoire en Sciences et Techniques
Tlemcen
Département des Mathématiques

DEVOIR SURVEILLÉ DU PREMIER SEMESTRE

Module: Algèbre III — Responsable: M.HOUBAD

Date: 19 Novembre 2013 — Année: 2013 - 2014

Coefficent: 3 — Durée: $2h00$

Exercice 1 (04 pts).

Soit $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tel que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux matrice diagonalisable ont les même vecteurs propres. Montrer que

$$\mathcal{A}\,\mathcal{B} = \mathcal{B}\,\mathcal{A}.$$

Exercice 2 (06 pts).

Soit $\mathbb{R}_2[X]$ le $\mathbb{R}$ - espace vectoriel des polynômes de degré au plus deux à coefficients dans $\mathbb{R}$ à variable dans $\mathbb{R}$, et soit l'application linéaire g de $\mathbb{R}_2[X]$ définie par

$$\forall\, \mathcal{P} \in \mathbb{R}_2[X] : \quad g(\mathcal{P}) = \mathcal{Q},$$

tel que

$$\forall\, x \in \mathbb{R} : \quad \mathcal{Q}(x) = a\,\mathcal{P}(x) + b\,(x + x^2)\left[\mathcal{P}^{(1)}(0) + \frac{1}{2}\mathcal{P}^{(2)}(0)\right] + \frac{1}{2}\left[a\,x + b\,x^2\right]\mathcal{P}^{(2)}(0).$$

Déterminer tout les couples $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ de tel sorte que g soit diagonalisable ou trigonalisable dans $\mathbb{R}$.

Exercice 3 (10 pts).

Soit $\mathbb{R}_2[X]$ le $\mathbb{R}$ - espace vectoriel des polynômes de degré au plus deux à coefficients dans $\mathbb{R}$ à variable dans $\mathbb{R}$, et soit l'application linéaire f de $\mathbb{R}_2[X]$ définie par

$$\forall\, \mathcal{P} \in \mathbb{R}_2[X] : \quad f(\mathcal{P}) = \mathcal{Q},$$

tel que

$$\forall\, x \in \mathbb{R} : \quad \mathcal{Q}(x) = 3\,\mathcal{P}(x) - (1 + x + x^2)\,\mathcal{P}(0) + \frac{1}{2}\mathcal{P}^{(2)}(0)\,x + \mathcal{P}^{(1)}(0)\,x^2.$$

1. Montrer que f représente un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer la matrice associée à f dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Montrer que cette matrice est diagonalisable, et déterminer sa matrice réduite diagonale, une matrice de passage et une base correspondante à la diagonalisation.
4. Dans la suite on note par

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, x \in \mathbb{R} : \quad \mathcal{P}_n(x) = a_n + b_n\,x + c_n\,x^2.$$

Déterminer le terme générale de la suite des polynômes définie par

$$\begin{cases} \forall\, n \in \mathbb{N}^* : \quad \mathcal{P}_n = f(\mathcal{P}_{n-1}), \\ \qquad\qquad avec \\ \forall\, x \in \mathbb{R} : \quad \mathcal{P}_0(x) = x. \end{cases}$$

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l' Enseignement Supérieure et de la Recherche Scientifique

École Preparatoire en Sciences et Techniques

Tlemcen

Département des Mathématiques

SOLUTION ET BARÈME DEVOIR SURVEILLÉ DU PREMIER SEMESTRE

Module: Algèbre III	Responsable: M.HOUBAD
Date: 19 Novembre 2013	Année: 2013 - 2014
Coefficent: 3	Durée: $2h00$

Exercice 1 (04 pts).

Soit $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tel que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux matrices diagonalisables ont les mêmes vecteurs propres. On veut montrer que

$$\mathcal{A}\,\mathcal{B} = \mathcal{B}\,\mathcal{A}\,.$$

1pt Vu que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont diagonalisables et ils ont les même vecteurs propres donc ils ont la même matrice de passage ce qui donne que

1.5pt

$$\begin{cases} \mathcal{A} = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} P^{-1} \\ \\ \mathcal{B} = P \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{pmatrix} P^{-1} \end{cases}$$

le calcule fournit

1pt

$$\begin{cases} \mathcal{A}\,\mathcal{B} = P \begin{pmatrix} \lambda_1\,\mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2\,\mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3\,\mu_3 \end{pmatrix} P^{-1} \\ \\ \mathcal{B}\,\mathcal{A} = P \begin{pmatrix} \mu_1\,\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2\,\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3\,\lambda_3 \end{pmatrix} P^{-1} \end{cases}$$

en conclusion

1pt

$$\mathcal{A}\,\mathcal{B} = \mathcal{B}\,\mathcal{A}\,.$$

Exercice 2 (06 pts).

Soit $\mathbb{R}_2[\,X\,]$ le $\mathbb{R}$ - espace vectoriel des polynômes de degré au plus deux à coefficients dans $\mathbb{R}$ à variable dans $\mathbb{R}$, et soit l'application linéaire g de $\mathbb{R}_2[\,X\,]$ définie par

$$\forall\, \mathcal{P} \in \mathbb{R}_2[\,X\,] : \quad g(\,\mathcal{P}\,) = \mathcal{Q}\,,$$

tel que

$$\forall\, x \in \mathbb{R} : \quad \mathcal{Q}(\,x\,) = a\,\mathcal{P}(\,x\,) + b\,(\,x + x^2\,)\,[\,\mathcal{P}^{(1)}(\,0\,) + \frac{1}{2}\,\mathcal{P}^{(2)}(\,0\,)\,] + \frac{1}{2}\,[\,a\,x + b\,x^2\,]\,\mathcal{P}^{(2)}(\,0\,)\,.$$

On veut déterminer tout les couples $(\,a, b\,) \in \mathbb{R}^2$ de tel sorte que g soit trigonalisable ou diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

1.5pt Alors il suffit de déterminer a et b de tel sorte que le polynôme caractéristique soit scindé dans $\mathbb{R}$.

1pt La matrice associée à g dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[\,X\,]$ vaut

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a+b & a+b \\ 0 & b & a+2b \end{pmatrix},$$

1pt et donc le polynôme caractéristique vaut

$$(\,a - \lambda\,)\,[\,\underbrace{\lambda^2 - (\,2\,a + 3\,b\,)\,\lambda + (\,a^2 + 2\,a\,b + b^2\,)}_{P}\,]$$

1pt pour que ce polynôme soit scindé il faut et il suffit que le discriminant de P soit positive ou nul ce qui revient à dire que

$$b\,(\,5\,b + 4\,a\,) \geq 0\,,$$

1.5pt en conclusion g est diagonalisable ou trigonalisable si et seulement si

$$\begin{cases} b \geq 0 \quad et \quad a \geq -\dfrac{5}{4}\,b \\ \qquad\quad ou \\ b \leq 0 \quad et \quad a \leq -\dfrac{5}{4}\,b \end{cases}$$

Exercice 3 (10 pts).

Soit $\mathbb{R}_2[\,X\,]$ le $\mathbb{R}$ - espace vectoriel des polynômes de degré au plus deux à coefficients dans $\mathbb{R}$ à variable dans $\mathbb{R}$, et soit l'application linéaire f de $\mathbb{R}_2[\,X\,]$ définie par

$$\forall\, \mathcal{P} \in \mathbb{R}_2[\,X\,] : \quad f(\,\mathcal{P}\,) = \mathcal{Q}\,,$$

tel que

$$\forall\, x \in \mathbb{R} : \quad \mathcal{Q}(\,x\,) = 3\,\mathcal{P}(\,x\,) - (\,1 + x + x^2\,)\,\mathcal{P}(\,0\,) + \frac{1}{2}\,\mathcal{P}^{(2)}(\,0\,)\,x + \mathcal{P}^{(1)}(\,0\,)\,x^2\,,$$

1pt 1. On montre que f représente un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[\,X\,]$. Il suffit de montrer que

$$\forall\, \mathcal{P} \in \mathbb{R}_2[\,X\,] : \quad f(\,\mathcal{P}\,) \in \mathbb{R}_2[\,X\,]\,.$$

1pt 2. La matrice associée à f dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[\,X\,]$.

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

3. On montre que cette matrice est diagonalisable, et on déterminersa matrice réduite diagonal, une matrice de passage correspondante et une base correspondante à la diagonalisation.

1.5pt (a) Les valeurs propres.

$$\lambda_1 = 2\,,\ \mathrm{mul}(\,\lambda_1\,) = 2\,, \quad \lambda_2 = 4\,,\ \mathrm{mul}(\,\lambda_2\,) = 1\,,$$

1.5pt (b) Les sous espaces propres.

$$\mathbb{E}_{\lambda_1} = \mathrm{Vect}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad \mathbb{E}_{\lambda_2} = \mathrm{Vect}\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

1pt (c) Conclusion.

$\mathcal{P}_g$ est scindé, et

$$\forall\ \lambda\ \in\ \mathrm{Sp}(\ g\ )\ :\quad \dim \mathbb{E}_\lambda\ =\ \mathrm{mul}(\ \lambda\ )\ ,$$

donc $\mathcal{A}$ est diagonalisable.

1pt (d) Matrice réduite et matrice de passage.

$$\mathcal{A}'\ =\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\ ,\quad P\ =\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1pt (e) La base correspondante à la diagonalisation.

$$\left\{\ 1\ +\ x\ ,\ 1\ +\ x^2\ ,\ x\ +\ x^2\ \right\}\ .$$

4. Dans la suite on note par

$$\forall\ n\ \in\ \mathbb{N}\ ,\ \forall\ x\ \in\ \mathbb{R}\ :\quad \mathcal{P}_n(\ x\ )\ =\ a_n\ +\ b_n\ x\ +\ c_n\ x^2\ .$$

On veut déterminer le terme générale de la suite des polynômes définie par

$$\begin{cases} \forall\ n\ \in\ \mathbb{N}\ :\quad \mathcal{P}_n\ =\ f(\ \mathcal{P}_{n\,-\,1})\ , \\ \qquad\qquad\qquad avec \\ \forall\ x\ \in\ \mathbb{R}\ :\quad \mathcal{P}_0(\ x\ )\ =\ x\ . \end{cases}$$

1pt Donc

$$\mathcal{P}_n\ =\ f^n(\ \mathcal{P}_0\ )\ \Longrightarrow\ \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}\ =\ \mathcal{A}^n\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1pt Or

$$\mathcal{A}^n\ =\ P\ \mathcal{A}'^n\ P^{-\,1}\ =\ \frac{1}{2}\ \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 & 0 \\ 2^n - 4^n & 2^n + 4^n & -2^n + 4^n \\ 2^n - 4^n & -2^n + 4^n & 2^n + 4^n \end{pmatrix}\ ,$$

1pt Finalement

$$\mathcal{P}_n(\ x\ )\ = \frac{1}{2}\ [\ (\ 2^n + 4^n\ )\ x\ +\ (\ -2^n + 4^n\ )\ x^2\ ]\ .$$

BP 165 RP, Bel Horizon, Tlemcen DZ - 13000, Algérie. Tél.+213(0)43 204 135. Fax. +213(0)43 201 824.
www.epst-tlemcen.dz

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l' Enseignement Supérieure et de la Recherche Scientifique
École Preparatoire en Sciences et Techniques
Tlemcen
Département des Mathématiques

DEVOIR SURVEILLÉ DU DEUXIÈME SEMESTRE

Module: Algèbre III	Responsable: M.HOUBAD
Date: 17 Mars 2014	Année: 2013 - 2014
Coefficent: 3	Durée: $2h00$

Exercice 1 (06 pts).

Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel de dimension finie n, et soit Q_1 et Q_2 deux formes quadratiques ont la même signature.

1. Montrer que pour chaque base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{E}$ il existe deux matrices inversibles P_1 et P_2 et une matrice diagonale $\mathcal{A}$ tel que
$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\,Q_1\,) \;=\; {}^tP_1\,\mathcal{A}\,P_1\;,\quad \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\,Q_2\,) \;=\; {}^tP_2\,\mathcal{A}\,P_2\;.$$
2. Soit g un endomorphisme de $\mathbb{E}$. Calculer $Q_2\big(g(x)\big)$ en fonction de la matrice associée à g, la matrice associée à Q_2 et le vecteur composantes de x dans une base $\mathcal{B}$ quelconque de $\mathbb{E}$.
3. On utilisant les questions précédente montrer qu'il existe un endomorphisme bijectif f de $\mathbb{E}$ tel que
$$\forall\, x\,\in\,\mathbb{E}\;:\quad Q_1(\,x\,)\;=\;Q_2\big(\,f(\,x\,)\,\big)\;.$$

Exercice 2 (14 pts).

Soit $\mathbb{E} = \mathcal{M}_2(\,\mathbb{R}\,)$ le $\mathbb{R}$ - espace vectoriel des matrices carrées deux lignes et deux colonnes à coefficient dans $\mathbb{R}$, et soit la forme $\mathcal{Q}$ définie sur $\mathbb{E}$ à valeur dans $\mathbb{R}$ par l'expression suivante
$$\forall\,\mathcal{A}\,\in\,\mathbb{E}\;:\quad \mathcal{Q}(\,\mathcal{A}\,)\;=\;\mathrm{Tr}(\,\mathcal{A}^2\,)\;.$$
On donne
$$\text{"La base canonique de }\mathbb{E}\text{"} \;=\; \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

1. Montrer que $\mathcal{Q}$ est quadratique et déterminer sa forme polaire $\mathcal{S}$.
2. Donner l'expression de $\mathcal{Q}(\,\mathcal{A}\,)$ et de $\mathcal{S}(\,\mathcal{A}\,,\,\mathcal{B}\,)$ en fonction des coefficient des deux matrices $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$.
3. Déterminer la matrice associée à Q et la matrice associée à $\mathcal{S}$ dans la base canonique de $\mathbb{E}$.
4. Déterminer la matrice associée à Q dans la base
$$\mathfrak{B} \;=\; \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$
5. Déterminer la réduction de Sylvestre de la forme Q.
6. Vérifier si la forme Q est définie positive, si elle est dégénérée et déterminer son rang.
7. Donner une base orthogonale de $\mathbb{E}$ relativement à la forme quadratique Q.
8. Donner le cône isotrope de Q.
9. Montrer qu'il n'existe aucune base orthonormée de $\mathbb{E}$ par rapport à Q.
10. Déterminer l'orthogonal par rapport à Q du sous espace vectoriel suivant
$$\mathbb{F} \;=\; \left\{\, \mathcal{A}\,\in\,\mathbb{E}\;:\quad {}^t\mathcal{A} \;=\; -\,\mathcal{A}\,\right\}\;.$$
11. Le sous espace vectoriel $\mathbb{F}$ est - il un sous espace vectoriel isotrope.

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l' Enseignement Supérieure et de la Recherche Scientifique

École Preparatoire en Sciences et Techniques

T l e m c e n

Département des Mathématiques

SOLUTION ET BARÈME DEVOIR SURVEILLÉ DU DEUXIÈME SEMESTRE

Module: Algèbre IV	Responsable: M.HOUBAD
Date: 17 Mars 2014	Année: 2013 - 2014
Coefficent: 3	Durée: $2h00$

Exercice 1 (06 pts).

Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel de dimension finie n, et soit Q_1 et Q_2 deux formes quadratiques ont la même signature.

2pts

1. Vu que les deux forme quadratiques ont la même signature

$$Sg(\, \mathcal{Q}_1 \,) \;=\; Sg(\, \mathcal{Q}_2 \,) \;=\; (\; p \;,\; r \;-\; p \;)\,,$$

donc ils ont la même forme réduite de Sylvestre.

– Pour $\mathcal{Q}_1$ dans une base $\mathcal{B}_1$

$$\mathcal{Q}_1(\, x \,) \;=\; \sum_{k\,=\,1}^{p} x_k'^2 \;-\; \sum_{k\,=\,p\,+\,1}^{r} x_k'^2\;.$$

– Pour $\mathcal{Q}_2$ dans une base $\mathcal{B}_2$

$$\mathcal{Q}_2(\, x \,) \;=\; \sum_{k\,=\,1}^{p} x_k''^2 \;-\; \sum_{k\,=\,p\,+\,1}^{r} x_k''^2\;.$$

Ce qui donne

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}(\, \mathcal{Q}_1 \,) \;=\; \mathcal{M}_{\mathcal{B}_2}(\, \mathcal{Q}_2 \,) \;=\; \mathcal{A} \;=\; \begin{pmatrix} 1 &&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&& \\ && 1 &&&&&& \\ &&& -1 &&&&& \\ &&&& \ddots &&&& \\ &&&&& -1 &&& \\ &&&&&& 0 && \\ &&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&& 0 \end{pmatrix}\,,$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{\substack{p \\ colonnes}}\;\underbrace{\qquad\qquad}_{\substack{r-p \\ colonnes}}\;\underbrace{\qquad\qquad}_{\substack{n-r \\ colonnes}}$$

on note par P_i la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}_i$ pour $i \in \{1, 2\}$, et on utilise la formule de changement des bases pour les formes bilinéaires et quadratiques, alors

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\, Q_1 \,) \;=\; {}^tP_1\, \mathcal{A}\, P_1\;,\quad \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\, Q_2 \,) \;=\; {}^tP_2\, \mathcal{A}\, P_2\;.$$

2pts

2. Soit g un endomorphisme de $\mathbb{E}$. On veut calculer $Q_2\big(\, g(\, x \,)\,\big)$ en fonction de la matrice associée à g, la matrice associée à Q_2 et le vecteur composantes de x dans une base $\mathcal{B}$ quelconque de l'espace vectoriel $\mathbb{E}$.
On note par $w = g(x)$ donc

$$Q_2(\, w \,) \;=\; {}^t\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\, w \,)\, \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\, \mathcal{Q}_2 \,)\, \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\, w \,)\;,$$

or

$$w = g(x) \Longrightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(w) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(g)\,\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x),$$

finalement

$$Q_2\big(g(x)\big) = {}^t\big(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(g)\,\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x)\big)\,\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{Q}_2)\,\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(g)\,\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x),$$

et donc

$$Q_2\big(g(x)\big) = {}^t\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x)\,{}^t\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(g)\,\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{Q}_2)\,\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(g)\,\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x),$$

2pts

3. L'existence un endomorphisme bijectif f de $\mathbb{E}$.
Vu le résultat de la question une on peut conclure que

$$\mathcal{A} = {}^tP_1^{-1}\,\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(Q_1)\,P_1^{-1} = {}^tP_2^{-1}\,\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(Q_2)\,P_2^{-1}.$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(Q_1) &= {}^tP_1\,{}^tP_2^{-1}\,\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(Q_2)\,P_2^{-1}\,P_1\\ &= {}^t(P_2^{-1}\,P_1)\,\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(Q_2)\,(P_2^{-1}\,P_1).\end{aligned}$$

ce qui permet d'avoir que

$$\forall\, x \in \mathbb{E} : \quad {}^t\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x)\,\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(Q_1)\,\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x) = {}^t\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x)\,{}^t(P_2^{-1}\,P_1)\,\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(Q_2)\,(P_2^{-1}\,P_1)\,\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x)$$

cela peut être écrit sous la forme suivante

$$\mathcal{Q}_1(x) = {}^t\big(P_2^{-1}\,P_1\,\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x)\big)\,\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(Q_2)\,\big(P_2^{-1}\,P_1\,\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x)\big)$$

or $P_2^{-1}P_1$ est une matrice carrée inversible donc elle représente un endomorphisme bijectif de $\mathbb{E}$ on le note f, ce qui donne que

$$\forall\, x \in \mathbb{E} : \quad \mathcal{M}_{\mathcal{B}}\big(f(x)\big) = P_2^{-1}\,P_1\,\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x),$$

donc

$$\forall\, x \in \mathbb{E} : \quad \mathcal{Q}_1(x) = {}^t\mathcal{M}_{\mathcal{B}}\big(f(x)\big)\,\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(Q_2)\,\mathcal{M}_{\mathcal{B}}\big(f(x)\big),$$

et finalement

$$\forall\, x \in \mathbb{E} : \quad Q_1(x) = Q_2\big(f(x)\big).$$

Exercice 2 (14 pts).

Soit $\mathbb{E} = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$ - espace vectoriel des matrices carrées deux lignes et deux colonnes à coefficient dans $\mathbb{R}$, et soit la forme $\mathcal{Q}$ définie sur $\mathbb{E}$ à valeur dans $\mathbb{R}$ par l'expression suivante

$$\forall\, \mathcal{A} \in \mathbb{E} : \quad \mathcal{Q}(\mathcal{A}) = \mathrm{Tr}(\mathcal{A}^2).$$

On donne

$$\text{"La base canonique de } \mathbb{E}\text{"} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

1. On montrer que $\mathcal{Q}$ est quadratique et déterminer sa forme polaire $\mathcal{S}$.
   (a) Méthode une :

1pt

   – Soit $\mathcal{A}$ une matrice de $\mathbb{E}$ notée

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

   ce qui donne que

$$\mathcal{Q}(\mathcal{A}) = a^2 + d^2 + 2\,c\,b,$$

   c'est un polynôme de plus

$$\forall\, \mathcal{A} \in \mathbb{E} : \quad \mathcal{Q}(\lambda\,\mathcal{A}) = \lambda^2\,\mathcal{Q}(\mathcal{A}),$$

   donc $\mathcal{Q}$ est une forme quadratique sur $\mathbb{E}$.

1pt

   – Sa forme polaire : on note

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix},$$

   ce qui donne

$$\mathcal{S}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = a\,a' + d\,d' + c\,b' + c'\,b.$$

2pts (b) Méthode deux :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\,\mathcal{A}\,,\,\mathcal{B}\,) &= \frac{1}{2}\,[\,\mathcal{Q}(\,\mathcal{A}+\mathcal{B}\,)\,-\,\mathcal{Q}(\,\mathcal{A}\,)\,-\,\mathcal{Q}(\,\mathcal{B}\,)\,] \\ &= \frac{1}{2}\,[\,\mathrm{Tr}\,(\,\mathcal{A}\,\mathcal{B}\,)\,+\,\mathrm{Tr}\,(\,\mathcal{B}\,\mathcal{A}\,)\,] \end{aligned}$$

or vu que les deux matrice sont dans $\mathbb{E}$ par calcule on a

$$\mathrm{Tr}\,(\,\mathcal{A}\,\mathcal{B}\,)\,=\,\mathrm{Tr}\,(\,\mathcal{B}\,\mathcal{A}\,)\,,$$

donc

$$\mathcal{S}(\,\mathcal{A}\,,\,\mathcal{B}\,)\,=\,\mathrm{Tr}\,(\,\mathcal{A}\,\mathcal{B}\,)\,,$$

elle est bilinéaire symétrique donc $\mathcal{S}$ est une forme polaire et alors $\mathcal{Q}$ est une forme quadratique.

2pts 2. L' expression de $\mathcal{Q}(\,\mathcal{A}\,)$ et de $\mathcal{S}(\,\mathcal{A}\,,\,\mathcal{B}\,)$ en fonction des coefficient des deux matrices $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$. Soit $\mathcal{A},\mathcal{B}$ deux matrice de $\mathbb{E}$ notées

$$\mathcal{A}\,=\,\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\,,\quad \mathcal{B}\,=\,\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\,,$$

ce qui donne que

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(\,\mathcal{A}\,) &= a^2\,+\,d^2\,+\,2\,c\,b\,, \\ \mathcal{S}(\,\mathcal{A}\,,\,\mathcal{B}\,) &= a\,a'\,+\,d\,d'\,+\,c\,b'\,+\,c'\,b\,. \end{aligned}$$

2pt 3. Détermination de la matrice associée à Q et la matrice associée à $\mathcal{S}$ dans la base canonique.

$$\mathcal{M}_{Canonique}(\,\mathcal{Q}\,)\,=\,\mathcal{M}_{Canonique}(\,\mathcal{S}\,)\,=\,\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\,,$$

1pt 4. Déterminer la matrice associée à Q dans la base

$$\mathfrak{B}\,=\,\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}\,,$$

la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathfrak{B}$

$$P\,=\,\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\,,$$

donc

$$\mathcal{M}_{\mathfrak{B}}(\,\mathcal{Q}\,)\,=\,\mathcal{M}_{\mathfrak{B}}(\,\mathcal{S}\,)\,=\,{}^tP\,\mathcal{M}_{Canonique}(\,\mathcal{Q}\,)\,P\,,$$

finalement

$$\mathcal{M}_{\mathfrak{B}}(\,\mathcal{Q}\,)\,=\,\mathcal{M}_{\mathfrak{B}}(\,\mathcal{S}\,)\,=\,\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\,.$$

1pt 5. La réduction de Sylvestre de la forme Q.

$$\mathcal{Q}(\,\mathcal{A}\,)\,=\,a'^2\,+\,b'^2\,+\,c'^2\,-\,d'^2\,,$$

tel que

$$\begin{cases} a' = a \\ b' = d \\ c' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,c\,+\,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,b \\ d' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,c\,-\,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,b \end{cases}$$

1pt 6. Vérification si la forme Q est définie positive, si elle est dégénérée et déterminer son rang.
La signature de $\mathcal{Q}$ vaut

$$Sg(\,\mathcal{Q}\,)\,=\,(\,3\,,\,1\,)\,,$$

donc $\mathcal{Q}$ elle n'est pas définie positive, elle est non dégénérée et sont rang vaut 4.

$\boxed{\texttt{1pt}}$ 7. Une base orthogonale de $\mathbb{E}$ relativement à la forme quadratique Q.

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \\ d' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathfrak{L}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix},$$

la matrice de passage vaut

$$P = \mathcal{L}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

et donc la base

$$\tilde{\mathcal{B}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

$\boxed{\texttt{1pt}}$ 8. Le cône isotrope de Q.

$$\mathcal{I}(\mathcal{Q}) = \mathrm{Vect} \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \bigcup \left\{ \begin{pmatrix} a & -\dfrac{a^2 + d^2}{2c} \\ c & d \end{pmatrix} \; / \; a, d \in \mathbb{R}, \; c \in \mathbb{R}^* \right\}.$$

$\boxed{\texttt{1pt}}$ 9. On montre qu'il n'existe aucune base orthonormée de $\mathbb{E}$ par rapport à Q.
Vu que la signature de $\mathcal{Q}$ vaut $(3, 1)$ donc $\mathbb{E}$ n'admet pas des bases orthonormées par rapport à la forme quadratique $\mathcal{Q}$.

$\boxed{\texttt{1pt}}$ 10. Détermination de l'orthogonal par rapport à Q du sous espace vectoriel $\mathbb{F}$.

$$\mathbb{F} = \left\{ \mathcal{A} \in \mathbb{E} : \; {}^t\mathcal{A} = -\mathcal{A} \right\} = \mathrm{Vect} \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

or

$$\mathbb{F}^{\perp} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}^{\perp} = \left\{ \mathcal{A} \in \mathbb{E} : \; \mathcal{S}\left(\mathcal{A}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right) = 0 \right\},$$

finalement

$$\mathbb{F}^{\perp} = \mathrm{Vect} \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

$\boxed{\texttt{1pt}}$ 11. Vérification si le sous espace vectoriel $\mathbb{F}$ est - il un sous espace vectoriel isotrope.
Soit $\mathcal{A}$ un élément de $\mathbb{F}$ donc

$$\mathcal{A} = \alpha \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R} \Longrightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{A}) = -2\alpha^2,$$

alors

$$\mathcal{Q}(\mathcal{A}) = 0 \Longrightarrow \alpha = 0 \Longrightarrow \mathcal{A} = 0$$

donc $\mathbb{F}$ ne contient aucun vecteur isotrope, alors $\mathbb{F}$ est un sous espace vectoriel non isotrope.

BP 165 RP, Bel Horizon, Tlemcen DZ - 13000, Algérie. Tél.+213(0)43 204 135. Fax. +213(0)43 201 824.
www.epst-tlemcen.dz