Algèbre III

Travaux dirigées

TD 1 : Diagonalisation et Trigonalisation des endomorphismes

Exercice 1.
Soit $\mathbb{E} = C^\infty(\ \mathbb{R};\mathbb{R}\ )$ le $\mathbb{R}$ - espace vectoriel des fonctions infiniment dérivables sur $\mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{R}$. Montrer que les familles suivantes sont libres

$$\{\ x\ ,\ e^x\ \}\ ,\ \ \{\ x\ ,\ \sin(\ x\ )\ \}\ ,\ \ \{\ \sin(\ x\ )\ ,\ \cos(\ x\ )\ \}\ ,\ \ \{\ e^x\ ,\ e^{2\,x}, e^{3\,x}\ \}\ .$$

Exercice 2.
Déterminer la dimension des sous espaces vectoriels suivants

1. Dans le cas de $\mathbb{R}^4$ vu comme un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel, les sous espaces vectoriels sont
$$\begin{aligned} F_1 &= \{\ (\ x,y,z,t\ )\ \in\ \mathbb{R}^4\ :\ x\ +\ y\ =\ 2\,t\ +\ z\ \}\ , \\ F_2 &= \{\ (\ x,y,z,t\ ) \in \mathbb{R}^4\ :\ 2\,x\ +\ 3\,y\ +\ 3\,z\ -\ 2\,t = \ 0\ ,\quad x\ +\ 5\,y\ +\ z\ +\ 3\,t\ =\ 0\ \}\ . \end{aligned}$$
2. Dans le cas de $\mathbb{R}_4[X]$ le $\mathbb{R}$ - espace vectoriel des polynômes à une indéterminé à coefficients dans $\mathbb{R}$ de degré au plus 4, les sous espaces vectoriels sont
$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1 &= \left\{\ P \in \mathbb{R}_4[X]\ :\ \int_{-\infty}^{+\infty}(\ X^2\ +\ X\ +\ 1\ )\ P(\ X\ )\, dX\ =\ 0\ \right\}\ . \\ \mathcal{P}_2 &= \left\{\ P \in \mathbb{R}_4[X]\ :\ P^{(\,2\,)}(\ X\ )\ X\ -\ P^{(\,3\,)}(\ X\ )\ X^2\ =\ P(\ 0\ )\ X^5\ \right\}\ . \end{aligned}$$

Exercice 3.
Soit l' application suivante

$$\forall X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3\ :\quad f(\ X\ )\ =\ \begin{pmatrix} x\ -\ y\ -\ z \\ -\,y\ -\ 2\,z \\ x\ +\ z \end{pmatrix}\ ,$$

1. Montrer qu'elle est linéaire, déterminer son noyau et son image ainsi que son rang.
2. Déterminer sa matrice associée dans la base canonique de l'espace $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer de deux facons différentes sa matrie associée dans la base suivante
$$\mathcal{B}\ =\ \left\{\ v_1\ =\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\ ,\ v_2\ =\ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\ ,\ v_3\ =\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\ \right\}\ .$$

Exercice 4.
Soit l'endomorphisme f de $\mathbb{R}_2[\ X\ ]$ défini par l'expression suivante

$$\forall\ P\ \in\ \mathbb{R}_2[\ X\ ]\ :\quad f(\ P\ )\ =\ P^{(\,1\,)}\ +\ P^{(\,2\,)}\ X\ .$$

1. Déterminer la matrice associée à f dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[\ X\ ]$.
2. Déterminer la matrice de passage de la base canonique à la base
$$\mathcal{B}\ =\ \{\ X^2\ +\ 1\ ,\ \ X\ +\ 1\ ,\ \ X^2\ +\ X\ +\ 1\ \}\ .$$

Exercice 5.
Soient $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel de dimension finie,$\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ deux sous espaces vectoriels de $\mathbb{E}$. Montrer que $\mathbb{F} \cap \mathbb{G}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{E}$ et que

$$\text{Vect}\ \langle\ \mathbb{F} \cup \mathbb{G}\ \rangle\ =\ \mathbb{F}\ +\ \mathbb{G}.$$

Exercice 6.
Soit $\mathcal{P} \in \mathbb{R}_n[\ X\ ]$ un polynôme de degré exactement n, et soit la famille de $\mathbb{R}_n[\ X\ ]$ définie par

$$\mathcal{F}_p\ =\ \left\{\ \mathcal{P}\ ,\ \mathcal{P}^{(1)}\ ,\ \mathcal{P}^{(2)}\ ,\ \cdots\ ,\ \mathcal{P}^{(p-1)}\ ,\ \mathcal{P}^{(p)}\ \right\}\ ,$$

1. Montrer que la famille $\mathcal{F}_p$ est libre si et seulement si $p \leq n$.
2. Déterminer p pour lequel la famille $\mathcal{F}_p$ soit une base de $\mathbb{R}_n[\ X\ ]$.

Exercice 7.
Soit le sous ensemble de l'espace vectoriel $\mathbb{E} = C^{\infty}(\,[0\,,\,\pi]\,,\,\mathbb{R}\,)$ défini par

$$\mathcal{T}_3 \;=\; \left\{\, f \in C^{\infty}(\,[0\,,\,\pi]\,,\,\mathbb{R}\,) \,/\, \exists\,(\,a_1\,,\,a_2\,,\,a_3\,) \,\in\, \mathbb{R}^3 \,:\; f(\,x\,) \,=\, a_1\,\sin(\,x\,) \,+\, a_2\,\sin(\,2\,x\,) \,+\, a_3\,\sin(\,3\,x\,)\,\right\}\,.$$

et soit l'application Ψ définie sur $\mathcal{T}_3$ par

$$\forall\, f \,\in\, \mathcal{T}_3 \,:\; \Psi(\,f\,) \,=\, f^{(\,2n\,)}\,,\;\; n \,\in\, \mathbb{N}\,.$$

1. Montrer que $\mathcal{T}_3$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{E}$.
2. Déterminer la dimension de $\mathcal{T}_3$.
3. Montrer que Ψ représente un endomorphisme de $\mathcal{T}_3$.
4. Déterminer les deux ensembles Ker Ψ et Im Ψ.
5. Déterminer la matrice associée à Ψ dans une base de $\mathcal{T}_3$.

Exercice 8.
Soient $\mathbb{C}_n[X]$ le $\mathbb{C}$ - espace vectoriel des polynômes à une indéterminé à coefficients dans $\mathbb{C}$ de degré au plus n, f une application définie sur $\mathbb{C}_n[X]$ par

$$\forall\, \mathcal{P} \,\in\, \mathbb{C}_n[X] \,:\; f(\,\mathcal{P}\,) \,=\, (\,X^n\,\mathcal{P}\,)^{(\,n\,)},$$

Montrer que f représente un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$, déterminer l'ensemble Ker f.

Exercice 9.
Soit la matrice $\mathcal{A}$ de $\mathcal{M}_3(\,\mathbb{C}\,)$ définie par

$$\mathcal{A} \,=\, \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\,,$$

Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de $\mathcal{A}$.

Exercice 10.
Soit l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ définie en donnant trois constantes a, b, c de $\mathbb{R}$ est par l'expression

$$g \,:\, \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3\,,\quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x + a\,y + 2\,z \\ 2\,y + b\,z \\ c\,z \end{pmatrix}\,.$$

Déterminer le triplet (a, b, c) de telle sorte que l'endomorphisme g soit diagonalisable.

Exercice 11.
Soient $\mathbb{R}_2[\,X\,]$ un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel et f l'application définie sur $\mathbb{R}_2[\,X\,]$ par

$$\forall\, \mathcal{P} \,\in\, \mathbb{R}_2[\,X\,] \,:\; f(\,\mathcal{P}\,) \,=\, \mathcal{P} \,+\, (\,2\,X \,+\, 1\,)\,\mathcal{P}^{(1)} \,+\, (\,X^2 \,+\, 1\,)\,\mathcal{P}^{(2)}\,.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[\,X\,]$.
2. Calculer $f^n(\,a_0 \,+\, a_1\,X \,+\, a_2\,X^2\,)$.

Exercice 12.
Soient $(\mathbb{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\mathbb{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathbb{Z}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites numériques réelles vérifiant

$$\left\{\begin{array}{lcl} \mathbb{U}_n & = & 8\,\mathbb{U}_{n-1} \,+\, 9\,\mathbb{Z}_{n-1}\,, \\[2ex] \mathbb{V}_n & = & -\,3\,\mathbb{U}_{n-1} \,-\, \mathbb{V}_{n-1} \,-\, 3\,\mathbb{Z}_{n-1}\,, \\[2ex] \mathbb{Z}_n & = & -\,6\,\mathbb{U}_{n-1} \,-\, 7\,\mathbb{Z}_{n-1}\,. \end{array}\right.$$

Déterminer les termes $\mathbb{U}_n$, $\mathbb{V}_n$ et $\mathbb{Z}_n$ en fonction de n, $\mathbb{U}_0 \,=\, a$, $\mathbb{V}_0 \,=\, b$ et $\mathbb{Z}_0 \,=\, c$.

Exercice 13.
Résoudre les deux systèmes différentiels d'ordre un à coefficients constants

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{d\,x}{d\,t} \,=\, 3\,x \,+\, 2\,y \,-\, 2\,z\,, \\[2ex] \dfrac{d\,y}{d\,t} \,=\, -\,x \,+\, z\,, \\[2ex] \dfrac{d\,z}{d\,t} \,=\, x \,+\, y\,. \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{d\,x}{d\,t} \,=\, 3\,x \,+\, y \,+\, 2\,z\,, \\[2ex] \dfrac{d\,y}{d\,t} \,=\, x \,+\, y\,, \\[2ex] \dfrac{d\,z}{d\,t} \,=\, -\,x \,+\, y \,+\, 2\,z\,. \end{array}\right.$$

Exercice 14.
Déterminer le terme générale de la suite $(\mathbf{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\,,\ n > 2\ :\quad \mathbf{U}_n = -2\cos(\alpha)\,\mathbf{U}_{n-1} - \mathbf{U}_{n-2}\,,$$

avec

$$\mathbf{U}_2 = 4\,(\cos\alpha)^2 - 1\,,\quad \mathbf{U}_1 = 2\cos\alpha\,.$$

Exercice 15.
Dans cette exercice on veut montrer que la matrice

$$\mathcal{A}_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})\,.$$

est diagonalisable. On note dans la suite par P_n le polynôme caractéristique de $\mathcal{A}_n$.

1. Montrer que
$$\forall\, n \in \mathbb{N}\,,\ n > 2\ :\quad P_n(x) = -x\,P_{n-1}(x) - P_{n-2}(x)\,.$$
2. Montrer que toutes les racines de P_n sont dans l'intervalle $]-2,+2[$ et déduire que $\mathcal{A}_n$ est diagonalisable (Indication : utiliser l'exercice précédent).

Exercice 16.
Résoudre l'équation différentielle suivante

$$\forall\, t \in \mathbb{R}\ :\quad f^{(3)}(t) - 3\,f^{(2)}(t) + 3\,f^{(1)}(t) - f(t) = 0\,,$$

Exercice 17.
Soit $\mathbb{E} = C^0(\mathbb{R};\mathbb{C})$ le $\mathbb{R}$ - espace vectoriel des fonctions infiniment dérivables sur $\mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{C}$, on définit l'endomorphisme Φ de $\mathbb{E}$ par

$$\Phi\,:\,\mathbb{E}\longrightarrow\mathbb{E}\,,\ f\longmapsto\Phi(f)\,,$$

tel que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\ :\ \Phi\big(f\big)(x) = \int_{-\pi/4}^{+\pi/4}\sin(x-t)\,f(t)\,dt\,.$$

Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de Φ.

Exercice 18.
Soit $C^0(\mathbb{R}_+;\mathbb{R})$ vu comme étant un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel, et soit son sous espace vectoriel défini par

$$\mathbb{E} = \big\{\, f \in C^0(\mathbb{R}_+;\mathbb{R})\ :\quad f(0) = 0 \,\big\}\,,$$

on défini l'application φ sur $\mathbb{E}$ par

$$\forall\, f \in \mathbb{E}\ :\begin{cases} \varphi\big(f\big)(0) = 0\,, \\ \forall\, x \in \mathbb{R}_+^*\ :\quad \varphi\big(f\big)(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,d\,t\,. \end{cases}$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{E}$.
2. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de φ.

Exercice 19.
Soit $\mathbb{E} := C^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$ - espace vectoriel des fonctions continûment dérivables sur $\mathbb{R}$, et soit l'application Φ définie sur $\mathbb{E}$ par

$$\Phi\,:\,\mathbb{E}\longrightarrow\mathbb{E}\,,\quad f\longmapsto\Phi\big(f\big) = g\,,$$

tel que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\ :\quad g(x) = \frac{\partial}{\partial\, t}\Big[\,sin(x+t)\,e^{\,x+t}\,f(t)\,\Big]_{t=0}\,.$$

1. Montrer que Φ représente un endomorphisme de $\mathbb{E}$.
2. Déterminer les deux ensembles $\operatorname{Ker}\Phi$ et $\operatorname{Im}\Phi$.
3. Montrer que la restriction de Φ sur l'ensemble $\operatorname{Im}\Phi$ n'est pas diagonalisable.

Exercice 20.
Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$f\ :\ \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3\,,\quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} -x + y - z \\ -x + y + z \\ -2x + 2y \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que f est diagonalisable.
2. Déterminer une base dans laquelle la matrice associée à f est diagonale.

Exercice 21.
Soit $\mathbb{R}_2[\,X\,]$ le $\mathbb{R}$ - espace vectoriel des polynômes à une indéterminée de degré au plus 2 à coefficients dans $\mathbb{R}$. On défini l'application linéaire L sur $\mathbb{R}_2[\,X\,]$ par l'expression

$$\forall\,\mathcal{P} \in \mathbb{R}_2[\,X\,]\ :\quad L(\,\mathcal{P}\,) = \mathcal{Q}\,,$$

tel que

$$\forall\,x \in \mathbb{R}\ :\quad \mathcal{Q}(\,x\,) = (\,1 + x\,)\,\mathcal{P}(\,x\,) - 3\int_0^x \mathcal{P}(\,t\,)\ dt\,.$$

1. Montrer que L est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[\,X\,]$.
2. Montrer que L ne peut être diagonalisée.

Exercice 22.
Soit la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer qu'elle est ni diagonalisable ni triangularisable dans $\mathbb{R}$.
2. Montrer qu'elle est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ et déterminer la matrice réduite diagonale et la matrice de passage correpondante.

Exercice 23.
Soient les deux matrices

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\,,\quad \mathcal{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

1. Calculer la valeur de
$$\mathcal{A}\,\mathcal{M} - \mathcal{M}\,\mathcal{A}\,.$$
2. Déterminer les valeurs et les vecteurs propres de l'endomorphisme $\mathcal{L}$ de $\mathcal{M}_2(\,\mathbb{R}\,)$ défini par
$$\forall\,\mathcal{M} \in \mathcal{M}_2(\,\mathbb{R}\,)\ :\quad \mathcal{L}(\,\mathcal{M}\,) = \mathcal{A}\,\mathcal{M} - \mathcal{M}\,\mathcal{A}\,.$$

Exercice 24.
Soit la matrice $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_3(\,\mathbb{R}\,)$ définie par

$$\mathcal{B} := \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

1. Montrer que la matrice $\mathcal{B}$ est triangularisable.
2. Donner la forme réduite de $\mathcal{B}$ est une matrice de passage correspondante.
3. Soient les fonctions $x(\,t\,)$, $y(\,t\,)$, $z(\,t\,)$ de classe C^1 de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, résoudre le systèmes des équations différentielles linéaires autonôme d'ordre un suivant

$$\frac{d}{d\,t}\,Y = \mathcal{B}\,Y\,.$$

Exercice 25.
Résoudre l'équation différentielle suivante dont $f \in C^3(\,\mathbb{R},\mathbb{R}\,)$ est l'inconnu

$$\forall\,x \in \mathbb{R}\ :\ f^{(3)}(\,x\,) + f^{(2)}(x) - f^{(1)}(\,x\,) - f(\,x\,) = 0\,.$$

Exercice 26.
Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel de dimension finie, montrer que

$$0 \in \mathrm{Sp}\,(\,f\,) \iff f \text{ n'est pas bijective}\,.$$

Exercice 27.
Soit $\mathbf{U}$ un isomorphisme d'un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel $\mathbb{E}$ de dimension finie, montrer que

$$\mathrm{Sp}\,(\,\mathbf{U}^{-1}\,) \;=\; \left\{\,\lambda^{-1}\;/\;\lambda\,\in\,\mathrm{Sp}\,(\,\mathbf{U}\,)\,\right\}\,.$$

Exercice 28.
Soient $\mathbb{E} = C^{\infty}(\,\mathbb{R};\mathbb{R}\,)$ et $\mathfrak{D}$ l'endomorphsime de $\mathbb{E}$ définie par

$$\forall\, f\,\in\,\mathbb{E}\,:\quad \mathfrak{D}(\,f\,)\;=\;f^{(\,1\,)}\,.$$

Déterminer les valeurs et les vecteurs propres de $\mathfrak{D}$.

Exercice 29.
Soit $\mathcal{M}_2(\,\mathbb{R}\,)$ le $\mathbb{R}$ - espace vectoriel des matrices carrées 2 lignes et 2 colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$, on définie l'application

$$\begin{array}{rcl} \phi\,:\,\mathcal{M}_2(\,\mathbb{R}\,) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\,\mathbb{R}\,) \\ \mathcal{A} & \longrightarrow & \phi(\,\mathcal{A}\,)\;=\;{}^t\mathcal{A}\,. \end{array}$$

1. Déterminer les valeurs propres de ϕ.
2. Déterminer si ϕ est diagonalisable.

Algèbre III

Travaux dirigées

TD 2 : Polynômes Annulateurs et minimales, Réduction en Blocs et Réduction de Jordan

Exercice 1.
Soit la matrice suivante

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 2 & 0 \\ 4 & -4 & 2 & 2 \\ 4 & -4 & 0 & 4 \end{pmatrix} .$$

On utilise la décomposition de Dunford.

1. Déterminer le terme générale de la suite vectoriel définie par
$$X_n = \mathcal{A}\, X_{n-1} , \quad X_0 \in \mathbb{R}^4 .$$
2. On utilisant l'exponentielle d'une matrice, résoudre le système
$$\frac{d}{dt} X = \mathcal{A}\, X .$$

Exercice 2.
Soit la matrice

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} .$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de $\mathcal{A}$ on utilisant la méthode des combinaisons des lignes et des colonnes pour le calcule du déterminant.
2. Déterminer les sous espaces propres et les sous espaces caractéristique de $\mathcal{A}$.
3. Montrer que
$$\mathbb{R}^4 = \mathrm{Ker}\,(\, \mathcal{A} - \mathrm{I}\,)^2 \oplus \mathrm{Ker}\,(\, \mathcal{A} - 2\,\mathrm{I}\,)^2 .$$
4. Donner la réduction en blocs triangulaires de la matrice $\mathcal{A}$ et une matrice de passage correspondante.
5. Déterminer le polynôme minimale de $\mathcal{A}$.
6. Donner $\mathcal{A}'$ la matrice réduite de Jordan de $\mathcal{A}$, une matrice de passage correspondante et calculer $\mathcal{A}'^n$
7. Donner la décomposition de Dunford de la matrice $\mathcal{A}$.
8. Calculer de deux méthodes différentes la valeurs de $\mathcal{A}^{-1}$ sans utiliser la co-matrice de $\mathcal{A}$

Exercice 3.
Soit $A \in \mathcal{M}_6(\mathbb{R})$ tel que

$$P_A(\, X\,) = (\, X - 1)^4\,(\, X - 2\,)^2 , \quad m_A(\, X\,) = (\, X - 1\,)^2\,(\, X - 2\,) .$$

Quelles sont les formes de Jordan possibles pour la matrice A.

Exercice 4.
Soit $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_n(\, \mathbb{K}\,)$ tel que le polynôme caractéristique de $\mathcal{A}$ est scindé.

1. Montrer que
$$\det \mathcal{A} = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(\, \mathcal{A}\,)} \lambda^{\mathrm{mul}(\,\lambda\,)} .$$
2. Déterminer les conditions sur les valeurs propres de $\mathcal{A}$ pour que la matrice $\mathcal{A}$ soit inversible.
3. Lorsque $\mathcal{A}$ est inversible déterminer les valeurs propre et les vecteurs propres de $\mathcal{A}^{-1}$.
4. Montrer que si $\mathcal{A}$ est diagonalisable inversible alors $\mathcal{A}^{-1}$ est aussi diagonalisable.
5. Déterminer l'inverse de $\mathcal{A}$ dans le cas ou cette matrice est inversible sans utilise la co-matrice de $\mathcal{A}$.

Exercice 5.
Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et $\mathbf{a}$ un élément non nul de $\mathbb{K}$. Soit $f \in \mathrm{End}(\ \mathbb{E}\ )$ tel que

$$f^3 \ - \ 3\,\mathbf{a}\, f^2 \ + \ \mathbf{a}^2\, f \ = \ 0\ .$$

1. Montrer que
$$\mathrm{Im} f \ = \ \mathrm{Ker}(\ f^2 \ - \ 3\,\mathbf{a}\, f \ + \ \mathbf{a}^2\, \mathrm{Id}\ )\ .$$
2. Montrer de deux facons différente que
$$\mathbb{E} \ = \ \mathrm{Ker} f \ \oplus \ \mathrm{Ker}(\ f^2 \ - \ 3\,\mathbf{a}\, f \ + \ \mathbf{a}^2\, \mathrm{Id}\ )\ .$$

Exercice 6.
Soient $\mathbb{C}^n$ vu comme un $\mathbb{C}$ - espace vectoriel, $\{\ e_1, \cdots, e_n\ \}$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$, et $f \in\ \mathrm{End}\ (\ \mathbb{C}^n\ )$ défini par

$$\begin{cases} f(\ e_i\ ) \ = \ e_{i+1}\ , & \forall\ i \ = \ 1, \cdots, n-1\ , \\ f(\ e_n\ ) \ = \ e_1\ . \end{cases}$$

1. Calculer $f^n(\ e_i\ )$ pour $i = 1, \cdots, n$.
2. Déduire que l'endomorphisme f est diagonalisable.
3. Monter que la famille suivante est libre
$$\left\{\ \mathrm{Id}\ ,\ f\ ,\ f^2\ ,\ \cdots\ ,\ f^{n\,-\,2}\ ,\ f^{n\,-\,1}\ \right\}\ .$$
4. Déterminer le polynôme minimal de l'endomorphisme f.

Exercice 7.
Soit $\mathcal{M}_n(\ \mathbb{R}\ )$ l'ensemble des matrice carrées de taille $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe une matrice $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_n(\ \mathbb{R}\ )$ admet $x^2 + 1$ comme polynôme minimal si et seulement si n est paire.

Exercice 8.
Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel admet un polynôme minimal m_f et soit $P \in \mathbb{K}[\ X\ ]$. Montrer que les deux polynômes P et m_f sont premiers entre eux si et seulement si l'endomorphisme $P(\ u\ )$ est inversible.

Exercices supplémentaires

Exercice 9.
Soient l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ définit par

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} x \ + \ y \ + \ z \ - \ t \\ y \ + \ 2\,z \\ x \ + \ 2\,z \\ x \ + \ 2\,y \end{pmatrix}\ .$$

Déterminer le polynôme minimal de f et discuter le caractère de diagonalisation de f.

Exercice 10.
Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel de dimension finie, et soit f un endomorphisme de $\mathbb{E}$ vérifiée

$$\forall\, x \ \in \ \mathbb{E}\ : \quad f^3(\ x\ ) \ = \ x\ .$$

Montrer alors qu'on a

$$\mathbb{E} \ = \ \mathrm{Ker}(\ f \ - \ \mathrm{Id}\ \ ) \ \oplus \ \mathrm{Ker}(\ f^2 \ + \ f \ + \ \mathrm{Id}\ \ )\ .$$

Exercice 11.
Soit la matrice

$$\mathcal{A} \ = \ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\,1 & 4 & 1 & -\,2 \\ 2 & 1 & 2 & -\,1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\ .$$

1. Donner la réduction de Jordan de la matrice $\mathcal{A}$ et une matrice de passage correspondante.
2. Donner la réduction de Dunford de la matrice $\mathcal{A}$ et calculer $\mathcal{A}^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 12.
Soit la matrice de $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ définie par

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Donner la réduction en blocs triangulaires de la matrice $\mathcal{A}$ et une matrice de passage correspondante.
2. Donner la réduction de Dunford de la matrice $\mathcal{A}$.
3. Calculer $\mathcal{A}^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 13.
Soit la matrice de $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ définie par

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de $\mathcal{A}$ on utilisant la méthode des combinaisons des lignes et des colonnes pour le calcule du déterminant.
2. Déterminer les sous espaces propres et les sous espaces caractéristique de $\mathcal{A}$.
3. Montrer que
$$\mathbb{R}^4 = \text{Ker}\,\mathcal{A}^2 \oplus \text{Ker}\,(\mathcal{A} - \mathrm{I})^2.$$
4. Donner la réduction en blocs triangulaires de la matrice $\mathcal{A}$ et une matrice de passage correspondante.
5. Donner de deux méthodes différentes la réduction de Dunford de la Matrice $\mathcal{A}$.
6. Déterminer le terme générale de la suite vectoriel définie par
$$X_n = \mathcal{A}\,X_{n-1}, \quad X_0 \in \mathbb{R}^4.$$
7. On utilisant l'exponentielle d'une matrice, résoudre le système
$$\frac{d}{dt} X = \mathcal{A}\,X.$$

Exercice 14.
Soient $\mathbb{E}$ un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel de dimension finie, f et g deux endomorphismes de $\mathbb{E}$ vérifiant

$$f \circ g - g \circ f = f$$

1. Montrer que
$$\forall\, n \in \mathbb{N}^* : \quad f^n \circ g - g \circ f^n = n\, f^n.$$
2. Soit P un polynôme. Montrer que
$$P(f) = 0 \Longrightarrow f \circ P'(f) = 0.$$
3. Soit P un polynôme. Montrer que
$$P(f) = 0 \Longrightarrow \forall\, k \in \mathbb{N}^* : \quad f^k \circ P^{(k)}(f) = 0.$$
4. En déduire que f est nilpotente.
5. En déduire que f est diagonalisable si et seulement si $f \equiv 0$.

Exercice 15.
Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel et f un endomorphisme de $\mathbb{E}$. Montrer que si P est un polynôme annulateur de f alors

$$\mathbb{E} = \text{Ker}\,P(f).$$

Exercice 16.
Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel et P un polynôme sur $\mathbb{K}$, tel que $P = \mathcal{Q}_1\mathcal{Q}_2$.

1. Montrer que si f un endomorphisme de $\mathbb{E}$ alors
$$P(f) = \mathcal{Q}_1(f) \circ \mathcal{Q}_2(f) = \mathcal{Q}_2(f) \circ \mathcal{Q}_1(f).$$
2. Si $\mathcal{Q}_1$ et $\mathcal{Q}_2$ sont premier entre eux alors
$$\text{Ker}\,P(f) = \text{Ker}\,\mathcal{Q}_1(f) \oplus \text{Ker}\,\mathcal{Q}_2(f).$$

Algèbre III

Travaux dirigées

TD 3 : Formes Bilinéaires et Quadratiques

Exercice 1.
Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel et b une forme bilinéaire non nécessairement symétrique, on définit la forme q par

$$\forall\, u \in \mathbb{E} : \quad q(\, u\,) = b(\, u, u\,)\, .$$

1. Montre que

$$\forall\, u\, ,\, v \in \mathbb{E} : \quad q\big(\, q(\, u\,)\, v - b(\, u, v\,)\, u\, \big) = q(\, u\,)\, \big[\, q(\, u\,)\, q(\, v\,) - b(\, u, v\,)\, b(\, v, u\,)\, \big]\, .$$

2. Si q est définie positive montrer que

$$\forall\, u\, ,\, v \in \mathbb{E} : \quad b(\, u, v\,)\, b(\, v, u\,) \leq q(\, u\,)\, q(\, v\,)\, .$$

Exercice 2.
Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel, on note par $\mathbb{S}$ le $\mathbb{R}$ - espace vectoriel des forme bilinéaires symétrique définies sur $\mathbb{E}$, par $\mathbb{A}$ le $\mathbb{R}$ - espace vectoriel des formes bilinéaires antisymétrique définie sur $\mathbb{E}$ et par $\mathbb{B}$ le $\mathbb{R}$ - espace vectoriel des formes bilinéaires définie sur $\mathbb{E}$.

1. Montrer que

$$\mathbb{B} = \mathbb{S} \oplus \mathbb{A}\, .$$

2. Montrer que pour tout forme bilinéaire $b \in \mathbb{B}$ la forme $\mathbb{Q}$ définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{E} : \quad \mathbb{Q}(\, x\,) = b(\, x, x\,)\, ,$$

   est une forme quadratique sur $\mathbb{E}$.

Exercice 3.
Soit q une forme quadratique sur un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel $\mathbb{E}$. On désigne par $\mathcal{A}^{\perp}$ l'orthogonale de $\mathcal{A}$ relativement à la forme q. Montrer que si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont deux parties non vide de $\mathbb{E}$ dans au moins l'une contient le vecteur nul, alors

$$(\, \mathcal{A} \cup \mathcal{B}\,)^{\perp} = (\, \mathcal{A} + \mathcal{B}\,)^{\perp}\, .$$

Exercice 4.
On définie la fonction suivante sur $\mathbb{R}_2[\, X\,] \times \mathbb{R}_2[\, X\,]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$

$$\forall\, P,\, Q \in \mathbb{R}_2[\, X\,] : \quad b(\, P, Q\,) = \int_{-1}^{+1} P(X)\, Q^{(\,1\,)}(X)\, dX\, .$$

1. Montrer qu'elle est bilinèaire et déterminer sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[\, X\,]$.
2. Discuter de deux facon différente si elle est symétrique.
3. Écrire de deux facon différente sa matrice dans la base

$$\{\, 1\, ,\, 1 + X\, ,\, 1 + 2\, X + X^2\, \}\, .$$

4. Déterminer le noyau de b de deux facons différentes et discuter si elle est dégénérée.

Dans la suite on considère la forme q définie par

$$\forall\, P \in \mathbb{R}_2[\, X\,] : \quad q(\, P\,) = b(\, P, P\,)\, .$$

1. Montrer que q représente une forme quadratique sur $\mathbb{R}_2[\, X\,]$.
2. Déterminer l'orthogonal par rapport à q des deux ensembles

$$\mathcal{D}_1 = \Big\{\, \mathcal{P} \in \mathbb{R}_2[\, X\,] : \quad 2\, \mathcal{P} - X\, \mathcal{P}^{(\,1\,)} = 1\, \Big\}\, ,$$
$$\mathcal{D}_2 = \Big\{\, \mathcal{P} \in \mathbb{R}_2[\, X\,] : \quad \mathcal{P}(\, 0\,) = \mathcal{P}^{(\,1\,)}(\, 0\,)\, \Big\}\, .$$

3. Déterminer la forme réduite de Sylvester de q et une base correspondante.
4. Déterminer le cône isotrope de q.
5. Montrer que $\mathbb{R}_2[\, X\,]$ admet des sous espaces isotropes relativement à $\mathcal{Q}$ et déterminer l'un d'eux.

Exercice 5.
Soient les applications suivante définie sur $\mathbb{R}^3$ vue comme étant un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel

$$\begin{aligned} q_1(\,X\,) &= x_1^2 \,+\, 2\,x_2^2 \,+\, x_3^2 \,-\, x_1\,x_2\,, \\ q_2(\,X\,) &= x_1\,x_2 \,+\, x_1\,x_3 \,+\, x_2\,x_3\,, \\ q_3(\,X\,) &= x_1^2 \,+\, x_2^2 \,-\, x_1\,x_2\,. \end{aligned}$$

1. Montrer qu'elles représentent des forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la matrice et la forme polaire correspondante à chaque forme quadratique dans la base canonique
3. déterminer de deux facons la matrice associée à chaque forme quadratique dans la base
$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} .$$
4. Déterminer le cône isotrope de chaque forme.
5. Déterminer la forme réduite de Sylvester, une base correspondante, la signature, le caractère d'etre définie positive et le caractàre d'etre dégénérée.

Exercice 6.
Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel de dimension finie, b une forme bilinéaires symétrique définie sur $\mathbb{E}$. Montrer que $\mathbb{E}$ admet une base orthonormée par rapport à la forme b si et seulement si b est définie positive.

Exercices supplémentaires

Exercice 7.
On définie la fonction suivante sur $\mathbb{R}_2[\,X\,] \times \mathbb{R}_2[\,X\,]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$

$$\forall\, P,\; Q \;\in\; \mathbb{R}_2[\,X\,] \;:\quad b(\,P,Q\,) \;=\; \int_{-1}^{+1} P(X)\,Q^{(\,1\,)}(X)\,dX\,.$$

1. Montrer qu'elle est bilinéaire et déterminer sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[\,X\,]$.
2. Discuter de deux facons différentes si elle est symétrique.
3. Écrire de deux facons différentes sa matrice dans la base
$$\left\{\, 1\;,\; 1+X\;,\; 1+2\,X+X^2 \,\right\}\,.$$
4. Déterminer le noyau de b et discuter si elle est dégénérée.

Exercice 8.
Soit $\mathbb{E} \;:=\; C^2(\,\mathbb{R}\,;\,\mathbb{R}\,)$ vue comme étant un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel, on définie sur $\mathbb{E}$ la relation

$$\forall\, f \;\in\; \mathbb{E} \;:\quad q(\,f\,) \;:=\; \int_{-1}^{+1} f(\,x\,)\,f^{(\,2\,)}(\,x\,)\,dx\,.$$

Montrer qu'elle représente une forme quadratique sur $\mathbb{E}$, déterminer sa forme pôlaire et discuter si elle est définie positive.

Exercice 9.
Soient $\mathbb{R}_2[\,X\,]$ vue comme étant un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel et $\mathcal{Q}$ une application définie sur $\mathbb{R}_2[\,X\,]$ par

$$\forall\, \mathcal{P} \;\in\; \mathbb{R}_2[\,X\,] \;:\quad \mathcal{Q}(\,\mathcal{P}\,) \;=\; \int_{-1}^{+1} \mathcal{P}(\,X\,)\,\mathcal{P}^{(\,2\,)}(\,X\,)\,d\,X\,.$$

1. Montrer de deux facons qu'il s'agit d'une forme quadratique sur $\mathbb{R}_2[\,X\,]$.
2. Déterminer sa forme réduite de Sylvester, une base correspondante et le cône isotrope.
3. Montrer que $\mathbb{R}_2[\,X\,]$ admet des sous espaces isotropes relativement à la forme $\mathcal{Q}$ et déterminer l'un d'eux.

Exercice 10.
Soit $\mathbb{R}_2[\,X\,]$ vue comme étant un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel, et soit l'application Φ définie sur $\mathbb{R}_2[\,X\,]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par

$$\forall\, \mathcal{P} \;\in\; \mathbb{R}_2[\,X\,] \;:\quad \Phi(\,\mathcal{P}\,) \;:=\; \mathcal{P}(\,1\,)\,\mathcal{P}^{(\,1\,)}(\,1\,)\,.$$

1. Montrer que Φ représente une forme quadratique sur $\mathbb{R}_2[\,X\,]$ et déterminer sa forme pôlaire associée qu'on note $\mathcal{S}$.

2. Déterminer l'orhtogonale de sous espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[\,X\,]$ définit par
$$F \;:=\; \big\{\, \mathcal{P} \;\in\; \mathbb{R}_2[\,X\,] \,/\quad \mathcal{P}(\,X\,) \;=\; a\,X^2 \;+\; b\,,\;\; \text{telque}\, a,\; b \;\in\; \mathbb{R} \,\big\}\,.$$
3. Résoudre l'équation suivante dans $\mathbb{R}_2[\,X\,]$
$$\forall\,\lambda \;\in\; \mathbb{R} \;:\qquad \mathcal{S}\big(\,\lambda\,X^2 \;+\; 1\;,\;(\,X \;-\; 1\,)\,\mathcal{P}(\,X\,)\,\big) \;=\; 0\,.$$
4. Déterminer la forme réduite de Sylvester de la forme Φ et une base correspondante.

Exercice 11.
Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel et soit g un endomorphisme de $\mathbb{E}$ et φ une application bilinèaire symétrique non dégénérée de $\mathbb{E}\times\mathbb{E}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et soit l'application bilinéaire b de $\mathbb{E}\times\mathbb{E}$ dans $\mathbb{R}$. Dans le cas ou $\mathbb{E}$ est de dimension finie et g bijective trouver l'endomorphisme f de $\mathbb{E}$ solution de l'équation
$$\forall\,X,\;Y\;\in\mathbb{E}\;:\qquad b(\,X,Y\,)\;=\;\varphi\big(\,f(\,X\,),g(\,Y\,)\,\big)\,.$$

Exercice 12.
Soit $C^1(\,\mathbb{R}\,,\,\mathbb{R}\,)$ vue comme étant un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel, et soit son sous espace vectoriel $\mathbb{E}$ définie par
$$\mathbb{E}\;:=\;\text{Vect}<\;cos(\,x\,)^2\;,\;cos(\,x\,)\;,\;1\;>\;.$$
On définie sur $\mathbb{E}$ l'application
$$\forall\,f\;\in\;\mathbb{E}\;:\quad \mathcal{Q}(\,f\,)\;:=\;f^{(1)}(\,\frac{\pi}{4}\,)\,f(\,\frac{\pi}{4}\,)\,.$$
1. Montrer que $\mathcal{Q}$ repésente une forme quadratique.
2. Déterminer $\mathcal{S}$ la forme pôlaire associée à $\mathcal{Q}$.
3. Déterminer la forme réduite de Syslvester de la forme $\mathcal{Q}$.
4. Déterminer le caractère d'être définie positive pour la forme $\mathcal{S}$.

Exercice 13.
Soit $\mathbb{R}_2[X]$ le $\mathbb{R}$ - espace vectoriel des polynômes à une indéterminée à coefficient dans $\mathbb{R}$ de degré au plus deux, et soit l'application
$$\begin{array}{rcl} b\;:\;\mathbb{R}_2[X]\times\mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\,P,Q\,) & \longmapsto & b(\,P,Q\,)\;=\;\displaystyle\int_{-\,1}^{+\,1} P(X)\,Q(X)\,dX. \end{array}$$
1. Montrer que b est une forme bilinéaire symétrique.
2. Déterminer la matrice associée à b dans la base de $\mathbb{R}_2[X]$ définie par
$$\big\{\;X^2\;-\;1\;,\;X\;,\;5\,X^2\;-\;1\;\big\}\;.$$
3. Soit le sous ensemble de $\mathbb{R}_2[X]$ définit par
$$\mathcal{A}\;=\;\big\{\;P\;\in\;\mathbb{R}_2[X]\;/\;P(X)\;=\;\alpha\,X^2\;+\;\beta\,X\;-\;\alpha\;,\;\text{tq}\quad(\alpha,\beta)\;\in\;\mathbb{R}^2\;\big\}\;,$$
déterminer l'orthogonale de $\mathcal{A}$ qu'on le note $\mathcal{A}^{\perp}$ relativement à la forme b
4. Déduire que
$$\mathbb{R}_2[X]\;=\;\mathcal{A}\;\oplus\;\mathcal{A}^{\perp}\;.$$
5. Discuter suivant les valeurs de $a\in\mathbb{R}$ l'existence des solutions dans $\mathbb{R}_2[X]$ de l'équation
$$\forall\,\gamma\;\in\;\mathbb{R}\;:\;\;b\big(\,\gamma\,X^2\;+\;X\;-\;\gamma\;,\;(\,X\;+\;a\,)P(X)\,\big)\;=\;0\,.$$
6. Déterminer la forme quadratique q associée à la forme bilinéaire b.
7. Déterminer la forme réduite de Sylvester de la forme q, donner sa signature.
8. La forme q est - elle définie positive ?
9. La forme q est - elle dégénérée ?
10. Déterminer une base de $\mathbb{R}_2[X]$ dans laquelle la forme quadratique q s'écrit sous la forme réduite de Sylvester.

Algèbre IV

Travaux dirigées

TD 4 : Espaces pré - hilbertiens réels

Exercice 1.
Soit f et g deux applications sur un espace pré hilbertien réel $(\mathbb{E} , < \cdot , \cdot >)$

1. Montrer que si f est surjective vérifiée
$$\forall\, x \,,\, y \,\in\, \mathbb{E} \,:\,\; < f(\,x\,)\,,\, f(\,y\,) \,>=< x \,,\, y \,> ,$$
alors f est linéaire.
2. Montrer que si f et g vérifiant
$$\forall\, x \,,\, y \,\in\, \mathbb{E} \,:\,\; < f(\,x\,)\,,\, y \,>=< x \,,\, g(\,y\,) \,> ,$$
alors f et g sont linéaires.

Exercice 2.
Soit le $\mathbb{R}$ - espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, et soit l'application $\langle \cdot , \cdot \rangle$ définie sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ par
$$\begin{aligned}\forall\, X \,,\, Y \,\in\, \mathbb{R}^3 \,:\; < X \,,\, Y > \;&=\; 2\,x_1\,y_1 + 2\,x_2\,y_2 + 2\,x_3\,y_3 + y_1\,x_2 + x_1\,y_2 \\ &\quad + y_1\,x_3 + x_1\,y_3 + y_2\,x_3 + x_2\,y_3 \,.\end{aligned}$$

1. Montrer que $\langle \cdot , \cdot \rangle$ représente un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.
2. Utiliser la procédure d'Orthonormalisation de Gram-Schimdt pour construire une base orthonormée relativement au produit scalaire $\langle \cdot , \cdot \rangle$ à partir de la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Utiliser la méthode de réduction de Gauss pour déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ relativement au produit scalaire $\langle \cdot , \cdot \rangle$.

Exercice 3.
Soit $\mathcal{M}_n(\,\mathbb{R}\,)$ le $\mathbb{R}$ - espace vectoriel des matrices crées n - lignes n - colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$

1. Montrer que $\mathcal{M}_n(\,\mathbb{R}\,)$ est de dimension finie et déterminer sa dimension.
2. Soit l'application définie sur $\mathcal{M}_n(\,\mathbb{R}\,) \times \mathcal{M}_n(\,\mathbb{R}\,)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie par
$$\forall\, \mathcal{A},\, \mathcal{B} \,\in\, \mathcal{M}_n(\,\mathbb{R}\,) \,: \qquad \mathcal{L}(\,\mathcal{A},\mathcal{B}\,) \,:=\, \mathrm{Tr}\big(\,{}^t\,\mathcal{A}\,\mathcal{B}\,\big) \,.$$
   (a) Montrer que $\mathcal{L}$ représente un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\,\mathbb{R}\,)$.
   (b) Déterminer la norme associée à $\mathcal{L}$ et exprimer la norme de $\mathcal{A}$ en fonction de ces coefficients.
   (c) Donner une base orthonormée de $\mathbb{E}$ par rapport au produit scalaire $\mathcal{L}$.

Exercice 4.
Soit $\mathbb{E} = \mathbb{R}_2[\,X\,]$ vu comme un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel, on définie sur $\mathbb{E}$ l'application
$$\forall\, \mathcal{P},\, \mathcal{Q} \,\in\, \mathbb{E} \,: \qquad h(\,\mathcal{P},\mathcal{Q}\,) \,:=\, \int_{-1}^{+1} \mathcal{P}(\,X\,)\,\mathcal{Q}(\,X\,)\,dX \,.$$

1. Montrer que $(\mathbb{E} \,,\, h)$ forme un espace pré - hilbertien réel.
2. Soit le sous espace vectoriel $\mathbb{F}$ de $\mathbb{E}$ définie par
$$\mathbb{F} \,:=\, \Big\{\, \mathcal{P} \,\in\, \mathbb{E}\,/\;\; \mathcal{P}^{(\,2\,)}(\,0\,) \,=\, 3\,\mathcal{P}(\,0\,) \,\Big\} \,.$$
Déterminer une base orthogonale de $\mathbb{F}$.

Exercice 5.
Soit $\mathbb{R}^4$ vu comme un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel, et soit l'application $||\, \cdot \,||$ définie sur $\mathbb{R}^4$ par
$$\forall\, X \,\in\, \mathbb{R}^4 \,:\;\; ||\; X \;|| = \sqrt{\begin{aligned} &3\,x_1^2 + 2\,x_2^2 + 2\,x_3^2 + x_4^2 + 2\,x_1\,x_2 + \\ &\quad + 2\,x_1\,x_3 + 2\,x_1\,x_4 + 2\,x_2\,x_4 \,,\end{aligned}}$$

et soit les deux sous espaces vectoriel de $\mathbb{R}^4$

$$\begin{aligned} \mathbb{F} &= \left\{ X \in \mathbb{R}^4 : \quad x_1 + x_2 + x_3 = 0 \, , \ x_1 + x_4 = 0 \right\} , \\ \mathbb{G} &= \left\{ X \in \mathbb{R}^4 : \quad x_1 + x_2 = 0 \, , \ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \right\} , \end{aligned}$$

1. Montrer que $|| \cdot ||$ est une norme sur $\mathbb{R}^4$.
2. Déterminer le produit scalaire associé à la norme $|| \cdot ||$.
3. Montrer qu'il existe une projection $\mathcal{P}$ de $\mathbb{R}^4$ sur $\mathbb{F}$ dirigée par $\mathbb{G}$.
4. Déterminer l'expression de cette projection dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
5. Cette projection est - elle orthogonale.

Exercice 6.
Soit le $\mathbb{R}$ - espace vectoriel $\mathbb{E} = \mathbb{R}_2[\, X \,]$ munit du produit scalaire canonique

$$\forall \, p \, q \in \mathbb{E} : \quad \langle \, p \, , \, q \, \rangle = \int_{-1}^{+1} p(\, x \,) \, q(\, x \,) \, dx \, .$$

Soit les deux sous espace vectoriel de $\mathbb{E}$

$$\begin{aligned} \mathbb{F} &= \left\{ p \in \mathbb{E} : \quad p(\, 0 \,) = p^{(\, 1 \,)}(\, 0 \,) \right\} , \\ \mathbb{G} &= \left\{ p \in \mathbb{E} : \quad \int_0^1 p(\, x \,) \, dx = 0 \right\} . \end{aligned}$$

1. Montrer qu'il existe
   (a) Une projection $\mathcal{P}_1$ de $\mathbb{E}$ sur $\mathbb{F}$ dirigée par $\mathbb{G}$
   (b) Une projection $\mathcal{P}_2$ de $\mathbb{E}$ sur $\mathbb{G}$ dirigée par $\mathbb{F}$.
2. Donner l'expression des deux projection $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ dans la base canonique de $\mathbb{E}$.
3. Ces deux projections sont - elle orthogonale.

Exercices supplémentaires

Exercice 7.
Soit $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_n(\, \mathbb{R} \,)$ tel que

$$\forall \, X \, , \, Y \in \mathbb{R}^n : \quad {}^t X \, \mathcal{A} \, Y = 0 \, .$$

Montrer que $\mathcal{A} = 0$.

Exercice 8.
Soit $\mathbb{R}_2[\, X \,]$ vue comme étant un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel, soit le produit scalaire

$$< p \, , \, q > = \int_{-1}^{+1} p(\, x \,) \, q(\, x \,) \, dx \, ,$$

et soit l'endomorphisme f de $\mathbb{R}_2[\, X \,]$ défini par

$$\forall \, p \in \mathbb{R}_2[\, X \,] : \quad f(\, p \,) = p(\, 0 \,) + p^{(\, 1 \,)}(\, 0 \,) + \frac{x^2}{2} \, p^{(\, 2 \,)}(\, 0 \,) \, .$$

1. Montrer que f est un projecteur.
2. Déterminer le sous espace vectoriel sur lequel on fait la projection.
3. Vérifiée s'il s'agit d'un sprojecteur orthogonal ou pas.

Exercice 9.
Soit $\mathcal{F}$ le $\mathbb{R}$ - espace vectoriel des fonctions développable en séries de Fourier sur l'intervalle $[\, -\pi \, , \, +\pi \,]$, et soit le produit scalaire $< \cdot \, , \, \cdot >$ défini sur $\mathcal{F}$ par

$$\forall \, f, \, g \in \mathcal{F} : \quad < f \, , \, g > = \int_{-\pi}^{+\pi} f(\, t \,) \, g(\, t \,) \, dt \, .$$

1. Montrer que le couple $(\, \mathcal{F} \, , \, < \cdot \, , \, \cdot > \,)$ forme un espace pré - hilbertien réelle.
2. Déterminer un base orthonormée de l'espace $\mathcal{F}$ relativement au produit scalaire $< \cdot \, , \, \cdot >$.
3. Utiliser l'inégalité de Bessel pour établir l'inégalité de Perceval.

Exercice 10.
Soit $\mathbb{E} := \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vu comme étant un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel et soit l'application $\mathcal{Q}$ définie sur $\mathbb{E}$ par

$$\forall \mathcal{A} \in \mathbb{E} : \quad \mathcal{Q}(\mathcal{A}) = \det \mathcal{A} .$$

1. Montrer de deux facons que $\mathcal{Q}$ représente une forme quadratique sur $\mathbb{E}$.
2. Donner la réduction de sylvestre (en somme des carrée, méthode de Gausse) de la forme $\mathcal{Q}$.
3. Montrer que le couple $(\mathbb{E}, \mathcal{Q})$ ne forme pas un espace euclidiens.
4. Déterminer une base orthogonale de l'espace $\mathbb{E}$ relativement à la forme $\mathcal{Q}$.
5. Montrer que le couple $(\mathbb{E}, \mathcal{Q})$ n'admet aucune base orthonormée.

Algèbre IV

Travaux dirigées

TD 5 : Espace pré - hilbertien partie 2, Espaces Euclidien partie 1

Exercice 1.
Soit $(\mathbb{E} , \langle \cdot , \cdot \rangle)$ un espace pré-hilbertien réel et $\mathbb{F}$ un sous espace vectoriel de $\mathbb{E}$ tel que

$$\dim \mathbb{F} < +\infty .$$

Montrer que si $\mathcal{P}$ est un projecteur orthogonale de $\mathbb{E}$ sur $\mathbb{F}$ et si $\{ v_1 , \cdots , v_p \}$ est une base orthonormée de $\mathbb{F}$, alors

$$\mathcal{P}(x) = \sum_{k=1}^{p} \langle x , v_k \rangle \, v_k .$$

Exercice 2.
Soit $\mathbb{E} = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$ - espace vectoriel des matrice carrée de taille deux à coefficients dans $\mathbb{R}$ et soit l'application

$$\forall \mathcal{A} , \mathcal{B} \in \mathbb{E} : \quad \langle \mathcal{A} , \mathcal{B} \rangle = \mathrm{Tr}({}^t\mathcal{A} \, \mathcal{B}) .$$

On considère les deux sous espace vectoriel de $\mathbb{E}$

$$\begin{aligned} \mathbb{F} &= \left\{ \mathcal{A} \in \mathbb{E} : \ {}^t\mathcal{A} = \mathcal{A} \right\} , \\ \mathbb{G} &= \left\{ \mathcal{A} \in \mathbb{E} : \ {}^t\mathcal{A} = -\mathcal{A} \right\} , \end{aligned}$$

1. Montrer que $(\mathbb{E} , \langle \cdot , \cdot \rangle)$ est un espace euclidien
2. Déterminer une base pour le sous espace vectoriel $\mathbb{F}$ et une base pour le sous espace vectoriel $\mathbb{G}$.
3. Montrer $\mathbb{F}^{\perp} = \mathbb{G}$.
4. Montrer qu'il existe une projection orthogonale $\mathcal{P}_1$ de $\mathbb{E}$ sur $\mathbb{F}$ et une projection orthogonale $\mathcal{P}_2$ de $\mathbb{E}$ sur $\mathbb{G}$.
5. Déterminer l'expression de ces deux projections dans la base canonique de $\mathbb{E}$.
6. Sans calcule montrer que
$$\mathcal{P}_1 \circ \mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_2 \circ \mathcal{P}_1 = 0 .$$
7. Déterminer la projection orthogonale de la matrice $\mathcal{A}$ définie par
$$\mathcal{A}^2 = \mathcal{A} ,$$
sur $\mathbb{F}$ et sur $\mathbb{G}$.
8. Déterminer la norme de la matrice $\mathcal{A}$ on fonction de ces coefficient
9. Déterminer la plus petite distance entre une matrice $\mathcal{A}$ quelconque de $\mathbb{E}$ est le sous espace vectoriel $\mathbb{F}$.
10. Montrer que
$$\forall \mathcal{A} , \mathcal{B} \in \mathbb{F} : \quad \left\{ \begin{array}{c} \left(\mathrm{Tr}(\mathcal{A} \, \mathcal{B}) \right)^2 \leq \mathrm{Tr}(\mathcal{A}^2) \, \mathrm{Tr}(\mathcal{B}^2) \\ \sqrt{\mathrm{Tr}(\mathcal{A}^2 + \mathcal{B}^2 + 2 \, \mathcal{A} \, \mathcal{B})} \leq \sqrt{\mathrm{Tr}(\mathcal{A}^2)} + \sqrt{\mathrm{Tr}(\mathcal{B}^2)} . \end{array} \right.$$
11. Soit $\mathcal{B}$ une matrice diagonale avec une trace qui vaut 4 et un déterminant qui vaut 3 et soit la matrice $\mathcal{A}$ solution de l'équation
$$\mathrm{Tr}({}^t\mathcal{A} \, \mathcal{B}) = 10 \, \mathrm{Tr}(\mathcal{A}^2).$$
Sans calcule déterminer la valeur de la trace et du déterminant de la matrice$\mathcal{A}$.

Exercice 3.
Soient $\mathbb{E} = \mathbb{R}_2[X]$ vu comme étant un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel, le produit scalaire

$$\forall f , g \in \mathbb{E} : \quad \langle f , g \rangle = \int_{-1}^{+1} f(t) \, g(t) \, dt ,$$

et le sous espace vectoriel

$$\mathbb{F} = \{ f \in \mathbb{E} : \ f(-x) = f(x) \} .$$

1. Déterminer le supplémentaire orthogonal de $\mathbb{F}$ dans $\mathbb{E}$.

2. On utilisant la matrice de Gram Déterminer la projection orthogonale d'un polynÃ´me quelconque de $\mathbb{E}$ sur $\mathbb{F}$.

Exercice 4.
On définie la distance entre un vecteur y et un sous espace vectoriel $\mathbb{F}$ par

$$d(\, y \,,\, \mathbb{F}\,) \;=\; \inf_{z\,\in\,\mathbb{F}} d(\, y \,,\, z\,)\,.$$

Soient $(\,\mathbb{E}\,,\, \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle\,)$ un espace euclidien réel, $\mathbb{F}$ un sous espace vectoriel de $\mathbb{E}$ et $\mathcal{P}$ la projection orthogonale de $\mathbb{E}$ sur $\mathbb{F}$.
Le bute de cet exercice est de montrer que si

$$\forall\, x \,\in\, \mathbb{E} \,:\quad d\,(\, x\,,\, \mathcal{P}(\, x\,)\,) \;=\; \inf_{z\,\in\,\mathbb{F}} d(\, x\,,\, z\,)\,.$$

1. Montrer que

$$\forall\, x \,\in\, \mathbb{E} \,:\quad x \;=\; \underbrace{(\, x \,-\, \mathcal{P}(\, x\,)\,)}_{\in\, \mathbb{F}^{\perp} \,=\, \mathrm{Ker}\,\mathcal{P}} \;+\; \underbrace{\mathcal{P}(\, x\,)}_{\in\, \mathrm{Im}\,\mathcal{P} \,=\, \mathbb{F}}\,.$$

2. Montrer que

$$\forall\, x \,\in\, \mathbb{E}\,, \forall\, z \,\in\, \mathbb{F} \,:\; ||\; x \,-\, z\; ||^2 = ||\; x \,-\, \mathcal{P}(\, x\,)\; ||^2 \,+\, ||\; z \,-\, \mathcal{P}(\, x\,)\; ||^2\,.$$

3. En déduire que

$$\forall\, x \,\in\, \mathbb{E} \,:\quad d\,(\, x\,,\, \mathcal{P}(\, x\,)\,) \;\leq\; \inf_{z\,\in\,\mathbb{F}} d(\, x\,,\, z\,)\,.$$

4. En déduire que

$$\forall\, x \,\in\, \mathbb{E} \,:\quad d\,(\, x\,,\, \mathcal{P}(\, x\,)\,) \;=\; \inf_{z\,\in\,\mathbb{F}} d(\, x\,,\, z\,)\,.$$

Exercice 5.
Soient $(\,\mathbb{E}\,,\, \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle\,)$ un espace euclidien, $\mathbb{F}$ un sous espace vectoriel de $\mathbb{E}$ et $\mathcal{B} \;=\; \{\, v_1\,,\,\cdots\,,\, v_p\,\}$ une base orthonormée de $\mathbb{F}$.
On considère $\mathcal{P}$ la projection orthogonale de $\mathbb{E}$ sur $\mathbb{F}$.

1. Montrer que

$$\forall\, x \,\in\, \mathbb{E} \,:\; ||\; x\; ||^2 = ||\; \mathcal{P}(\, x\,)\; ||^2 \,+\, ||\; x \,-\, \mathcal{P}(\, x\,)\; ||^2\,.$$

2. En déduire que

$$\forall\, x \,\in\, \mathbb{E} \,:\quad d(\, x\,,\, \mathbb{F}\,)^2 \;= ||\; x\; ||^2 \,-\, ||\; \mathcal{P}(\, x\,)\; ||^2\,.$$

3. Déduire que

$$\forall\, x \,\in\, \mathbb{E}\,, \forall\, k \;=\; 1\,\cdots\, p \,:\quad \langle\, v_k\,,\, x\,\rangle \;=\; \langle\, v_k\,,\, \mathcal{P}(\, x\,)\,\rangle\,.$$

4. Montrer que

$$G(\, v_1\,,\,\cdots\,,\, v_p\,,\, x\,) \;=\; \begin{pmatrix} \boxed{\quad G(\, v_1\,,\,\cdots\,,\, v_p\,) \quad} & \begin{matrix} \langle\, v_1\,,\, \mathcal{P}(\, x\,)\,\rangle \\ \vdots \\ \langle\, v_p\,,\, \mathcal{P}(\, x\,)\,\rangle \end{matrix} \\ \langle\, v_1\,,\, \mathcal{P}(\, x\,)\,\rangle \;\cdots\; \langle\, v_p\,,\, \mathcal{P}(\, x\,)\,\rangle & d(\, x\,,\, \mathbb{F}\,)^2 + ||\; \mathcal{P}(\, x\,)\; ||^2 \end{pmatrix}$$

5. On déduire que

$$d(\, x\,,\, \mathbb{F}\,) \;=\; g(\, v_1\,,\,\cdots\, v_n\,,\, x\,)\,.$$