Université Abou Bekr Belkaid - Tlemcen
Faculté des sciences
Département de mathématiques

Année universitaire: 2026 - 2027
Module: Analyse 3
L2 Mathématiques

T.D N°2 : Suites et séries de fonctions

Exercice 1

Soit $f_n : [0,+\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{nx}{1+2nx}, n \in \mathbb{N}^*$.

1. Calculer $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$.
2. f est-elle continue sur $\mathbb{R}^+$?
3. A-t-on la convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$?
4. Posons $I = [a,+\infty[$ où $a > 0$.

i. Calculer $\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)|$.

ii. f_n converge -t-elle uniformément sur I ?

Exercice 2

Sur $[0,1]$, on définit les deux suites de fonctions (f_n) et (g_n) par les expressions :

$$f_n(x) = (x(1-x))^n + x \text{ et } g_n(x) = (1-x)^n + x$$

1. Etudier la convergence simple des suites des fonctions (f_n) et (g_n).
2. Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$.
3. Montrer que $\forall\ a \in]0,1[$, la suite de fonctions (g_n) converge uniformément sur $[a,1]$.
4. La suite de fonctions (g_n) converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?

Exercice 3

On considère la suite de fonctions (f_n) définie sur $[0,1]$ par : $f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}$.

1. Etudier la convergence simple de (f_n) sur $[0,1]$.
2. Vérifier que $\forall u \in \mathbb{R}, 1+u^2 \geq 2u$.
3. En déduire que $\forall x \in [0,1],\ |f_n(x)| \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$.
4. La convergence est-elle uniforme sur $[0,1]$?
5. Calculer $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$.

Exercice 4

On considère la suite de fonctions $f_n(x) = xe^{-nx^2}$ où $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$.
2. Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, comparer les quantités $\frac{d}{dx}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right)$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{d}{dx}(f_n(x))$.
3. Que peu-t-on dire sur la converge uniforme de la suite de fonctions dérivées $\left(f'_n(x)\right)$?

Exercice 5

Trouver le domaine de convergence simple des séries de fonctions suivantes :

$$\sum_{n\geq1}(\ln(x))^n, \sum_{n\geq1}\frac{1}{sh(nx)}, \sum_{n\geq1}\frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}, \sum_{n\geq1}\frac{x^{4n}}{1+x^{2n}}.$$

Exercice 6

Soit $f_n : [0,+\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{\ln(x+n)}{n^2}, n \geq 1.$

1. Etudier la convergence simple de la série de fonctions $\sum f_n(x)$. On note $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$
2. Montrer que S est de classe C^2 sur $[0,+\infty[$ et exprimer pour tout $x \in [0,+\infty[$ $S'(x)$ et $S''(x)$ sous formes de sommes de séries.
3. En déduire que S est strictement croissante sur $[0,+\infty[$ et que S est concave sur $[0,+\infty[$.

Exercice 7

Soit la série de fonctions de terme général : $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n^x},\ x \in \mathbb{R}^{+*}$.

1. Déterminer le domaine de convergence absolue de cette série.
2. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} u_n(x)$ est convergente sur $\mathbb{R}^{+*}$.
3. Déterminer $\sup_{x\in I} |u_n(x)|$ où $I = [a,+\infty[$ et $a > 1$.
4. $\sum_{n\geq 1} u_n(x)$ est-elle uniformément convergente sur I.

Exercice 8

On considère la suite de fonctions $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n^3},\ x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$.

1. Etudier la convergence simple et la convergence normale de la série $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire que $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Etudier la convergence normale de la série $\sum_{n\geq 1} f'_n(x)$ sur $\mathbb{R}$.
4. En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner f' sous forme d'une série.
5. Par intégration, montrer que $\int_0^{\pi} f_n(x)dx = \dfrac{1}{n^4}(1-(-1)^n)$
6. Déduire que $\int_0^{\pi} f(x)dx = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(2n-1)^4}$.

Exercice 9

1. Étudier la convergence simple, normale et uniforme sur $\mathbb{R}^+$ de la série de fonctions suivante :

$$\sum_{n\geq 1} f_n(x) \text{ où } f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n^2+x}.$$

2. Soit $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$. Montrer que

$$\int_0^1 f(x)dx = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right).$$

Exercices supplémentaires

Exercice 1

Etudier la convergence simple des suites des fonctions suivantes :

$f_n(x) = \left(\frac{x^2+n}{2x^2+n}\right)^n$, $g_n(x) = \frac{1}{1+x^2+x^4+\ldots+x^{2n}}$, $h_n(x) = \frac{nx^n}{x^{2n}+x^n+1}$, $k_n(x) = \frac{x^{4n}}{1+x^{2n}}$

Exercice 2

Soit (f_n) la suite de fonctions réelles définie par

$$f_n(x) = \frac{1-nx^2}{nx+2},\ n \in \mathbb{N}.$$

1. Etudier la convergence simple et uniforme de la suite (f_n) sur $\mathbb{R}$.
2. Etudier la convergence uniforme de la suite (f_n) sur $[a,+\infty[$ avec $a > 0$.

Exercice 3

Soit $f_n(x) = x^n(1-x),\ x \in [0,1], n \geq 1$.

1. Montrer que (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$.
2. Calculer sans intégration $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 x^n(1-x)dx$.

Exercice 4

Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{ne^x}{n+x}dx.$$

Exercice 5

Sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ on définit une suite de fonctions par, $f_n(x) = n(\cos x)^n \sin x$

1. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, calculer l'intégrale simple définie $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)dx$.
2. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Exercice 6

On considère la série de fonction $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ où $f_n(x) = \frac{\cos nx}{n^3}$

1. Déterminer le domaine de convergence de cette série.
2. Montrer que $f(x) = \sum_{n\geq 1} f_n(x)$ est une fonction continue sur son domaine de convergence.
3. Montrer que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^4}$.
4. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -\sum_{n\geq 1} \frac{\sin nx}{n^2}$

Exercice 7

1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} ne^{-nx}$ converge uniformément sur $[1,+\infty[$.
2. Soit $f(x)$ la somme de cette série. Calculer $\int_a^b f(x)dx$ avec $1 < a < b$.

Exercice 8

Soit $f_n(x) = \frac{x}{(1+x)^n},\ x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$.

1. Etudier la convergence simple de la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$.
2. Soit $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$. Calculer $S(x)$.
3. Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ ne converge pas uniformément sur $[0,+\infty[$.

Exercice 9

Soit $f_n(x) = \frac{x}{(1+x)^n},\ x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$.

1. Etudier la convergence simple de la la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$.
2. Soit $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$. Calculer $S(x)$.
3. Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ ne converge pas uniformément sur $[0,+\infty[$.

Exercice 10

Considèrons la suite de fonctions $f_n(x) = \frac{x}{n(n+x)},\ x \in \mathbb{R}^+, n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$.
2. Montre que $\forall a > 0$, la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ converge normalement sur $[0,a]$.
3. A-t-on la convergence normale sur $\mathbb{R}^+$?
4. Etudier la continuité de $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 11

On considère la série de fonctions $\sum f_n(x)$ où $f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2},\ x \in \mathbb{R},\ n \geq 1$

1. Montrer que la série converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f.
2. Montrer que la convergence est uniforme sur tout intervalle $[a,+\infty[$ avec $a > 0$.
3. La fonction somme f est-elle continue sur $\mathbb{R}^*$? Intégrable sur $[1,2]$? Justifier.

Exercice 12

Soit la suite de fonctions $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n(x) = (-1)^n \ln\left(1 + \frac{x}{n(1+x)}\right)$ pour $x \geq 0$ et $n \geq 1$.

1. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} u_n(x)$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$.
2. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} u_n(x)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$.
3. La convergence est-elle normale sur $\mathbb{R}^+$?

Exercice 13

1. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{x}{n^2+x^2}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ et que sa somme et continue, mais que la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}^+$.
2. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{x}{n^2+x^2}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$ mais que la convergence n'est pas normale sur $\mathbb{R}^+$.