



T.D N°1 : Séries numériques

Exercice 1

1. On considère les deux séries numériques $\sum_{n \geq 1} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ où $u_n = \frac{5 \cdot 4^n - 3}{\sqrt{2n} + 1}$ et $v_n = \frac{n!}{2^n}$

Notons par (S_n) et (T_n) les sommes partielles des séries $\sum_{n \geq 1} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ respectivement.

Ecrire en extension les sommes partielles S_1, S_3, T_2, T_4

2. Trouver l'expression du terme général pour les sommes écrites en extension suivantes

$$\frac{5}{1 \times 2} + \frac{8}{2 \times 3} + \frac{11}{3 \times 4} + \frac{14}{4 \times 5} + \dots \quad \frac{1}{3} - \frac{4}{9} + \frac{9}{27} - \frac{16}{81} + \dots \quad 2 - \frac{3}{4} + \frac{4}{9} - \frac{5}{16} + \dots$$

3. Nature des séries suivantes : $\sum \cos \frac{1}{n^2}$, $\sum \frac{(-1)^n n}{n+1}$, $\sum \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $\sum \left(\cos \frac{1}{n}\right)^{n^2}$

Exercice 2

1. Déterminer la nature des séries suivantes en utilisant les sommes partielles :

$$(1) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(4n-3)(4n+1)}, (2) \sum_{n \geq 1} \ln \left(1 + \frac{1}{n^2 + 2n}\right), (3) \sum_{n \geq 1} n \cdot n!, (4) \sum_{n \geq 2} \frac{2^n}{3^{n-2}}, (5) \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{e^{-n}(2\pi)^n}$$

2. Calculer les sommes suivantes: (a) $\sum_{n \geq 0} \frac{n+1}{n!}$, (b) $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2-1}{n!}$, (c) $\sum_{n \geq 0} \frac{n^3}{n!}$, (d) $\sum_{n \geq 1} n \cdot 2^{n-1}$, (e)

$$\sum_{n \geq 0} \arctan \left(\frac{1}{n^2 + n + 1} \right)$$

Indication: (a) $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} = e$ (b) $n^2 = n(n-1) + a \cdot n$ (c) $n^3 = n(n-1)(n-2) + b \cdot n(n-1) + c \cdot n$ a,

(d) calculer $S_n - 2S_{n-1}$ (e) utiliser $\arctan x - \arctan y = \arctan \left(\frac{x-y}{1+xy} \right)$

Exercice 3

Considérons la série $\sum_{n \geq 0} \frac{n}{2^n}$ et on note par S_n sa somme partielle.

1. Montrer que $S_n = 2S_{n+1} + \frac{1}{2^n} - 2$ (Ind : poser pour tout $0 \leq k \leq n$, $k = (k+1) - 1$)

2. En déduire que la série est convergente, de somme égale à 2.

Exercice 4

1. Montrer que si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries à termes positifs convergentes, alors les séries $\sum (\sqrt{u_n v_n})$ et $\sum \frac{\sqrt{u_n}}{n}$ sont aussi convergentes.

2. Soit (w_n) une suite de réels positifs ou nuls tels que $\forall M \in \mathbb{R}^+, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n_0} w_k > M$.

Montrer que $\sum_{k=0}^{n_0} w_k$ diverge.

Exercice 5

1. Donner la nature des séries numériques suivantes :

$$\sum \frac{1}{3^{\ln n}} \text{ (vérifier que } 3^{\ln n} = n^{\ln 3} \text{)}, \sum \frac{1}{(\ln n)^n} \text{ pour } n \geq e^2, \sum \frac{2^{\sqrt{n}}}{n!}, \sum \frac{4^{(-1)^n}}{n}$$
$$, \sum_{n \geq 1} \sin\left(1 + \frac{\cos n\pi}{n^2}\right), \sum_{n \geq 0} \frac{n!}{n^{2+n}}, \sum \frac{1}{n^4 + 2 - \cos n}, \sum \frac{\ln n}{n}, \sum \frac{1}{3^n + \sqrt{n}}, \sum \frac{\ln n}{n^2}, \sum n^2 \ln n e^{-n}$$

Exercice 6

Critères de d'Alembert ou de Cauchy

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(n!)^\alpha}{n^n} \text{ (} \alpha \in \mathbb{R} \text{)}, \sum_{n \geq 1} \frac{n^{10}}{4^n}, \sum_{n \geq 1} \left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^n, \sum_{n \geq 0} \frac{(n!)^2}{(2n)!}, \sum_{n \geq 1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}, \sum_{n \geq 1} (\sqrt[n]{n} - 1)^n$$

Exercice 7

1. Etudier la convergence et la convergence absolue des séries suivantes :

$$\sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{1}{n+1}, \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, \sum_{n \geq 0} \frac{\sin(n!)}{n^n}, \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n \ln n}{n}$$

Exercice 8

Soient $\alpha \in \mathbb{R}^{*+}$ et (U_n) la suite définie par : $U_n = \frac{(-1)^n}{\alpha n + 1}$

1. Montrer que la suite (V_n) définie par $V_n = |U_n|$ est décroissante.

2. Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} U_n$ est semi-convergente. 3. Soit $0 < t < 1$. Calculer $\int_0^1 t^{\alpha n} dt$ et $\sum_{n \geq 0} (-1)^n t^{\alpha n}$

4. Montrer que: $\sum_{n \geq 0} U_n = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^\alpha}$ 5. En déduire que: $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln 2$ et $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$

6. Donner des valeurs approchées de $\ln 2$ et de π à des précisions 10^{-3} et 10^{-4} respectivement.

Exercice 9

Étude et comportement asymptotique de la série harmonique.

On pose $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n}$. On sait d'après le cours que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$

On veut déterminer un équivalent de H_n à l'infini.

1. (Supp) Montrer que pour tout $x > 0$, on a : $\frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln x \leq \frac{1}{x}$

2. Posons $u_n = H_n - \ln n$ et $v_n = u_{n+1} - u_n$.

i. Étudier la nature de la série $\sum v_n$. ii. Montrer que la suite (u_n) est convergente.

(On notera γ sa limite, elle s'appelle "constante d'Euler" et vaut approximativement 0.577).

3. En déduire que $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$.

Exercice 10

Un étudiant propose la rédaction suivante pour justifier la convergence de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$

On a $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Or la série $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge d'après le critère spécial des séries

alternées. Le théorème d'équivalence permet donc de conclure la convergence de la série proposée. Commenter la démonstration proposée.

EXERCICES SUPPLEMENTAIRES

Exercice 11

Déterminer la nature des séries suivantes en utilisant les sommes partielles :

$$\sum \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}, \sum \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right), \sum \frac{1}{(n^3 - n)}, \sum (-1)^n \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right),$$
$$\sum (3^{-n+2} + 2^{-n+3}), \sum \frac{(-1)^n + \sqrt{n+1} - 3\sqrt{n}}{3^{n+1}}, \sum \arctan\left(\frac{1}{2n}\right)$$

Exercice 12

1. Etudier la nature des séries de termes généraux suivants :

$$a_n = \frac{1}{n3^n}, n \geq 1, b_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right)^n, n \geq 1, c_n = \int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{\sin x}{x^2 + 1} dx, n \in \mathbb{N}^*, \sum_{n \geq 0} (\ln(\sqrt{x}))^n \cdot x$$
$$d_n = \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n t^n, n \geq 1, t \in \mathbb{R}. u_n = \sin\left(\frac{n^2 + 2n + 1}{n} \pi\right), u_n = \left(\sqrt{n + \frac{1}{n}} - \sqrt{n}\right).$$

2. Etudier la convergence des séries suivantes:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{n}{n^3 + 1}, \sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt{n}}{n^2 + \sqrt{n}}, \sum_{n \geq 1} n \sin\left(\frac{1}{n}\right), \sum_{n \geq 1} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}, \sum_{n \geq 2} \frac{n}{\sqrt{n^3 - 1}}, \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n + \sqrt{n}}$$
$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \text{ (remarquer que: } n! \geq 2^{n-1} \forall n \geq 2), \sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n^n)}{n!}, \sum_{n \geq 1} \ln\left(\frac{n^2 + n + 1}{n^2 + n - 1}\right)$$

3. Déterminer la nature des séries $\sum U_n$ suivantes:

$$U_n = \frac{\sin(n^2)}{n^2}, U_n =, U_n = \frac{\cos(n^2 \pi)}{n \ln n}, U_n = \frac{(-1)^n n}{n+1}, U_n = \frac{(-1)^n}{n + e^n}.$$

Exercice 13

1. Vérifier que la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^4}$ est convergente par deux méthodes.

2. Trouver une valeur approchée de sa somme S avec une erreur ne dépassant pas 10^{-2}

Exercice 14

On considère la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ où $u_n = \frac{2n-1}{n(3n-1)}$

1. Montrer que cette série est à termes positifs.

2. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$. Peut-on conclure la nature de cette série?

3. Étudier la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ en utilisant une comparaison avec une série

de référence

Exercice 15

1. Étudier la nature de la série de terme général : $u_n = \frac{n^2}{n^4 + 3n^2 + 1}$

Préciser le critère ou la comparaison utilisée.

2. Étudier la nature de la série de terme général : $v_n = \frac{(-1)^n n}{n^2 + 1}$

La série est-elle absolument convergente ? Semi-convergente ?

Exercice 16

Soit (V_n) une suite des réels et soit (U_n) une suite définie par : $U_n = V_{n+1} - V_n$

1. Calculer $S_n = \sum_{k=0}^n U_k$
2. Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} U_n$ et la suite (V_n) sont de même nature.
3. Application:
 - i. Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{n}{(n+1)!}$ est convergente et calculer sa somme.

Indication : $n = (n+1) - 1$

ii. Peut-on conclure la convergence de cette série, en appliquant le critère de D'Alembert

Exercice 17

On considère la série $\sum_{n \geq 0} (-1)^n (\sqrt{n^2 + 1} - n)$

1. Montrer qu'elle est convergente. On note S sa somme.
2. Est-elle absolument convergente.
3. Soit S_{49} la somme des 50 premiers termes de la série.

Majorer l'erreur d'approximation $|S - S_{49}|$

Exercice 18

Soit (u_n) une suite à termes positifs. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$v_n = \frac{u_n}{1 + u_n} \text{ et } w_n = \frac{u_n}{1 + u_n^2}$$

1. Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.
2. Montrer que si la série $\sum u_n$ converge alors la série $\sum w_n$ converge.
3. Montrer que si la série $\sum u_n$ diverge et si (u_n) est majorée alors la série $\sum w_n$ diverge.
4. Donner un exemple où la série $\sum u_n$ diverge et la série $\sum w_n$ converge.

Exercice 19

1. Montrer que les deux séries suivantes sont absolument convergentes

$$\sum \frac{1}{n!} \text{ et } \sum \frac{(-1)^n}{2^n}$$

2. En déduire que la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left[\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k}}{k! 2^{n-k}} \right]$$

est absolument convergente et déterminer sa valeur.

Exercice 20

On considère les suites réelles (a_n) et (b_n) définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}.$$

1. Montrer que les séries numériques $\sum_{n \geq 1} a_n$ et $\sum_{n \geq 1} b_n$ ne sont pas de même nature.
2. Montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont équivalentes au voisinage de l'infini.
3. Que peut-on conclure ?

Exercice 21

On considère la série $\sum_{n \geq 0} \frac{\cos n}{2^n}$. Notons $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{\cos k}{2^k}$ et $T_n = \sum_{k=0}^n \frac{\sin k}{2^k}$.

1. Montrer que $S_n + iT_n$ est la somme des termes d'une suite géométrique.

$$S_n + iT_n = \sum_{k=0}^n \frac{\cos k}{2^k} + i \sum_{k=0}^n \frac{\sin k}{2^k} = \sum_{k=0}^n \left(\frac{\cos k}{2^k} + i \frac{\sin k}{2^k} \right) = \sum_{k=0}^n \frac{e^{ik}}{2^k} = \sum_{k=0}^n \left(\frac{e^i}{2} \right)^k$$

2. En déduire que la suite $(S_n + iT_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et calculer sa limite.

$$\left| \frac{e^i}{2} \right| = \frac{1}{2} < 1$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n + iT_n) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 - \left(\frac{e^i}{2} \right)^{n+1}}{1 - \frac{e^i}{2}} \right) = \frac{1}{1 - \frac{e^i}{2}} = \frac{2}{2 - e^i} = \frac{2}{2 - \cos 1 - i \sin 1} \\ &= \frac{2(2 - \cos 1 + i \sin 1)}{(2 - \cos 1)^2 + \sin^2 1} = \frac{4 - 2 \cos 1 + 2i \sin 1}{4 - 4 \cos 1 + \cos^2 1 + \sin^2 1} = \frac{(4 - 2 \cos 1) + i(2 \sin 1)}{5 - 4 \cos 1} \end{aligned}$$

(3) Montrer que $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\cos k}{2^k} = \frac{4 - 2 \cos 1}{5 - 4 \cos 1}$.

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\cos k}{2^k} = \operatorname{Re} \left(\frac{(4 - 2 \cos 1) + i(2 \sin 1)}{5 - 4 \cos 1} \right) = \frac{4 - 2 \cos 1}{5 - 4 \cos 1}$$