



T.D N° 0 Suites et sommes

Exercice 1

1. Calculer les limites suivantes

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n^2 + 3n} - n, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n + 3^n}{3^n + 4^n}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^n}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a} \quad a > 0$$

2. Etudier la convergence des suites suivantes $u_n = \frac{\sin n}{n}$, $v_n = \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n+1}$

Exercice 2

1. Calculer les sommes suivantes : $\sum_{k=3}^{12} (2k+3)$, $\sum_{k=2}^{11} (\sqrt[3]{2})^{k-1}$, $\sum_{k=4}^{31} \ln\left(\frac{k}{k+1}\right)$

2. Donner en fonction de n les sommes S_n puis calculer leurs limites

$$S_n = \sum_{k=2}^n (5k-1), S_n = \sum_{k=1}^n 5 \cdot 3^k, S_n = \sum_{k=2}^{n+1} (1+2^k), S_n = \sum_{k=n}^{n+1} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{3^k}\right)$$

Exercice 3

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$, $u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{2}$

1. Montrer que (u_n) est bornée et monotone et en déduire qu'elle converge et calculer sa limite.
2. Montrer directement que (u_n) est de Cauchy.

Exercice 4

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$

1. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
2. Vérifier que $u_{n+1}^2 - u_n^2 = 2 + \frac{1}{u_n^2}$

3. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1}^2 - u_k^2)$ et en déduire que $\frac{u_n^2}{n} = \frac{1}{n} + 2 + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2}$

4. En utilisant le théorème de Cesàro, Montrer que $u_n \sim \sqrt{2n}$ pour n assez grand.

Rappel : Théorème (Cesàro). Soit (a_n) une suite réelle (ou complexe). Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l$ (l fini ou infini),

alors la suite des moyennes arithmétiques $b_n = \frac{a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}}{n}$ converge aussi vers l .

Exercice 5

1. Montrer que la suite $U_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ est convergente, sans chercher à calculer sa limite exacte

(indication : comparer $\frac{1}{k^2}$ à $\frac{1}{k(k-1)}$).

2. Vérifier la convergence de (U_n) en utilisant le critère de Cauchy.

3. Montrer que la suite $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ est divergente en utilisant deux méthodes :

- i. par l'absurde
- ii. critère de Cauchy (**Indication** : Considérer $S_{2n} - S_n$).