

UNIVERSITÉ ABOU BEKR BELKAID – TLEMCEN
Faculté des Sciences - Département de Mathématiques

Polycopié de cours

Module Analyse (Promotion : L1 – Mathématiques)

Année universitaire : 2026–2027

Présenté par : Mohammed KADA KLOUCHA

Version en cours de révision

Document provisoire – version non finalisée

Semestre : 1 : Fondamentale

Matière : Analyse1-Crédits : 6 -Coefficient : 4

Programme

Chapitre I : Le Corps des Réels

Chapitre II : Le Corps des Nombres Complexes

Chapitre III : Suites des nombres réels

Chapitre V: Fonctions continues et fonctions dérivables

Chapitre 1

Le corps des réels

1.1 Les modes de raisonnement en mathématiques

Les modes de raisonnement (direct, contraposée, absurde, disjonction de cas et récurrence) sont des outils fondamentaux en mathématiques pour établir des vérités avec rigueur et logique.

Raisonnement direct

On démontre une implication (P alors Q) et on écrit simplement $(P \Rightarrow Q)$, en enchaînant directement les étapes logiques à partir de P pour arriver à Q .

Exemple:

Si n est divisible par 4, **alors** n est pair.

En effet,

n est divisible par 4 équivaut à dire que $n = 4k = 2(2k)$, donc n est pair.

Raisonnement par contraposée

Pour prouver (P alors Q) et on écrit simplement $(P \Rightarrow Q)$, il suffit de montrer $((\text{non}Q) \text{ alors } (\text{non}P))$ ou bien $(\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$.

Exemple:

Soit $a \in \mathbb{N}$, si 2 divise a^2 , **alors** 2 divise a

En effet,

Contraposée : Si 2 ne divise pas a , alors 2 ne divise pas a^2 .

2 ne divise pas a équivaut à dire que

$$a = 2k + 1, k \in \mathbb{N} \Leftrightarrow a^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

d'où 2 ne divise pas a^2 .

Raisonnement par l'absurde

On suppose que la proposition à prouver est fausse. Si cela conduit à une contradiction, la proposition est donc vraie.

Exemple :

Montrons que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

En effet,

Supposons qu'il soit rationnel : $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ avec p et q entiers premiers entre eux.

$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow 2q^2 = p^2$, donc 2 divise p^2 , d'où 2 divise p car à d, il existe $k \in \mathbb{Z}$, tel que $p = 2k$.

$2q^2 = p^2 \Leftrightarrow 2q^2 = (2k)^2 \Leftrightarrow q^2 = 2k^2$, ainsi 2 divise q^2 , d'où 2 divise q .

Donc $\text{GDC}(p, q) = 2$, qui est une contradiction le faite que p et q entiers premiers entre eux.

Donc $\sqrt{2}$ est irrationnel. (irrationnel = non rationnel)

Raisonnement par disjonction des cas

On étudie séparément les différents cas possibles et on montre que la propriété est vraie dans chacun.

Exemple :

Montrons que pour tout entier n , $(n^2 - n)$ est divisible par 2.

- Cas 1 : n est pair, donc $n = 2k \Rightarrow n^2 - n = 4k^2 - 2k = 2(k^2 - k)$.

- Cas 2 : n est impair, donc $n = 2k + 1 \Rightarrow n^2 - n = (2k + 1)^2 - (2k + 1) = 2(2k^2 + 2k)$.

Conclusion : Dans les deux cas, la propriété est vérifiée.

Raisonnement par récurrence

Méthode pour prouver qu'une propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Étapes : 1. Initialisation :

Vérifier $P(n)$ est vraie pour $n = n_0$

Étapes : 2 Hérédité :

Supposer $P(k)$ vraie pour $k \geq n_0$, montrer alors que $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion : $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Exemple: Montrons que $P(n) = 1 + 2 + \dots + n = n(n+1)/2$ pour tout $n \geq 1$.

- **Initialisation :**

Pour $n = 1$, $1 = 1(1+1)/2$, vrai.

- **Hérédité :**

supposons que $P(n)$ est vrai pour $n = k : 1 + 2 + \dots + k = k(k+1)/2$.

Alors pour $n = k+1$

$$1 + 2 + \dots + k + (k+1) = k(k+1)/2 + (k+1) = (k+1)(k+2)/2.$$

Donc la formule est vraie par récurrence.

1.2 Les nombres réels

Notations

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ est l'ensemble des entiers naturels.
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ est l'ensemble des entiers relatifs.
- $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \text{ tels que } m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}^*, m \text{ et } n \text{ sont premiers entre eux} \right\}$
 $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres rationnels.
- $\overline{\mathbb{Q}}$ est l'ensemble des nombres irrationnels tel que $\mathbb{Q} \cap \overline{\mathbb{Q}} = \emptyset$.
- $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \overline{\mathbb{Q}}$ est l'ensemble des nombres réels.
- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

1.2.1 Les nombres décimaux

Définition

Un nombre décimal fini est un nombre rationnel de la forme $r = \frac{p}{10^n}$, $p \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$.

Exemple: $r = 1.567$, $p = 0,2626\dots26$, $l = 7,8513513\dots$

Proposition

Un nombre réel r est rationnel si et seulement si il admet une écriture décimale finie ou décimale périodique.

Exercice

1. Écrire les nombres précédents sous forme rationnels.
2. Montrer que $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal fini

1.2.2 Les nombres irrationnels

Définition

On dit qu'un nombre est irrationnel s'il ne vérifie pas la propriété des nombres rationnels, pour cela pour vérifier qu'un nombre n'est pas rationnel on utilise le **raisonnement par l'absurde** pour utiliser la définition des nombres rationnels.

Autrement dit $p \notin \mathbb{Q}$ s'il n'admet pas une écriture décimale finie ou décimale périodique.

- On note l'ensemble des nombres irrationnels par $\overline{\mathbb{Q}}$ tel que $\mathbb{Q} \cap \overline{\mathbb{Q}} = \emptyset$ et $\mathbb{Q} \cup \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Exemple: Nombres irrationnels

$\sqrt{2} = 1.41\dots$, $\log_2 3$, $\pi = 3.1415\dots$, $e = 2.71\dots$

Exercice

1. Montrer que les nombres $\sqrt{2}$, $\log_2 3$ ne sont pas rationnels.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\sqrt{\frac{n}{n+2}} \notin \mathbb{Q}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$, si n n'est pas un carré parfait alors $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$
4. Soit $n, m \in \mathbb{N}$, qui ne sont pas des carrés parfaits alors $\sqrt{n} + \sqrt{m} \notin \mathbb{Q}$

Proposition

$\mathbb{Q}$ est un corps, en effet

1) $(\mathbb{Q}, +)$ est un groupe abélien

$$\forall p, q \in \mathbb{Q}, p + q \in \mathbb{Q} \text{ (stabilité)}$$

$$\forall p, q \in \mathbb{Q}, p + q = q + p \text{ (commutativité)}$$

$$0 \in \mathbb{Q}, \forall p \in \mathbb{Q}, p + 0 = p \text{ (élément neutre)}$$

$$\forall p \in \mathbb{Q}, -p \in \mathbb{Q}, \text{ et } p + (-p) = 0 \text{ (opposé)}$$

$$\forall p, q, r \in \mathbb{Q}, (p + q) + r = p + (q + r). \text{ (associativité)}$$

3) (La distributivité de la multiplication sur l'addition)

$$\forall p, q, r \in \mathbb{Q}, p \times (q + r) = (p \times q) + (p \times r).$$

2) $(\mathbb{Q}^*, \times)$ est un groupe abélien

$$\forall p, q \in \mathbb{Q}, p \times q \in \mathbb{Q}$$

$$\forall p, q \in \mathbb{Q}, p \times q = q \times p$$

$$1 \in \mathbb{Q}, \forall p \in \mathbb{Q}, p \times 1 = p$$

$$\text{Si } p \in \mathbb{Q}^*, \text{ alors } p^{-1} \in \mathbb{Q}, \text{ et } p \times (p^{-1}) = 1$$

$$\forall p, q, r \in \mathbb{Q}, (p \times q) \times r = p \times (q \times r)$$

Remarque

$\overline{\mathbb{Q}}$ n'est pas un corps, en effet

Soit $p = \sqrt{2}$ et $q = \sqrt{2} - 1$, on a bien $p, q \in \overline{\mathbb{Q}}$, mais $p - q = 1 \notin \overline{\mathbb{Q}}$.

Propriétés

1) Si $p \in \mathbb{Q}$ et $q \in \overline{\mathbb{Q}}$ alors $p + q \notin \mathbb{Q}$.

2) Si $p \in \mathbb{Q}^*$ et $q \in \overline{\mathbb{Q}}$ alors $p \times q \notin \mathbb{Q}$.

Preuve: Voir TD ■

1.2.3 Rappel à l'ordre

Notations

$$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\},$$

$$\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\},$$

$$\mathbb{R}_*^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\},$$

$$\mathbb{R}_*^- = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}.$$

Pour $x, y \in \mathbb{R}$ on désigne par $\max(x; y)$ et $\min(x; y)$ les nombres

$$\max(x; y) = \begin{cases} x & \text{si } y \leq x \\ y & \text{si } x \leq y \end{cases}, \quad \min(x; y) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq y \\ y & \text{si } y \leq x \end{cases}$$

Propriétés

1. $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \leq y \text{ ou } y \leq x.$
2. $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x \leq y \iff x + z \leq y + z.$
3. $\forall x, y \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R}_*^+ : x \leq y \iff xz \leq yz.$
4. $\forall x, y \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R}_*^- : x \leq y \iff xz \geq yz.$
5. Si $x, y \in \mathbb{R}$ et $xy > 0$ alors $x \leq y \iff \frac{1}{x} \geq \frac{1}{y}.$
6. Si $x, y \in \mathbb{R}$ et $y > 0$ alors $x \leq y \iff \frac{x}{y} \leq 1.$
7. Si $x, y \in \mathbb{R}$ et $y < 0$ alors $x \leq y \iff \frac{x}{y} \geq 1.$
8. Si $x \leq y$ et $x' \leq y'$ alors $x + x' \leq y + y'.$

1.3 La valeur absolue

Définition

On appelle *valeur absolue* d'un réel x , notée $|x|$, le nombre réel :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Propriétés

1. $\forall x \in \mathbb{R} : |x| = 0 \iff x = 0.$
2. $\forall x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2} = |x| \geq 0.$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall a \geq 0 : |x| \leq a \iff -a \leq x \leq a.$
4. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall a \geq 0 : |x| \geq a \iff x \geq a \text{ ou } x \leq -a.$
5. $\forall x \in \mathbb{R}. -|x| \leq x \leq |x|$
6. $\forall x, y \in \mathbb{R} : |xy| = |x| |y|.$

7. $\forall x, y \in \mathbb{R} : |x + y| \leq |x| + |y|$ (inégalité triangulaire). (démonstration voir TD)

8. $\forall x, y \in \mathbb{R} : ||x| - |y|| \leq |x - y|$. (démonstration voir TD).

9. $1 + |xy - 1| \leq (1 + |x - 1|)(1 + |y - 1|)$. (EXERCICE)

10. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \frac{|x|}{1 + |x|}$. (EXERCICE)
On a $\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x + y) \leq f(x) + f(y)$.

Remarque:

La quantité $|x - y|$ représente la distance entre x et y et $|x|$ est la distance entre x et 0.

1.4 Les intervalles

Définition

On appelle intervalle I de $\mathbb{R}$, vérifiant pour tout x et y dans I et pour tout $z \in \mathbb{R}$

$$\text{si } (x \leq z \leq y) \Rightarrow (z \in I)$$

Exemple

1. $[0, 1[$, $]-\infty, 2]$ sont des intervalle.
2. $\mathbb{Z}$ n'est pas un intervalle car pour $x = 0$ et $y = 1$ tout deux appartient à $\mathbb{Z}$, mais $0 \leq \frac{1}{3} \leq 1$
et $\frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$

Remarque

1. On appelle l'intervalle $[a, b]$ un intervalle fermé et $]a, b[$ un intervalle ouvert.
2. $\{a\} = [a, a]$ est dit singletent.
3. $\emptyset$ est l'intervalle qui ne contient aucun élément.

Propriété

Soit I_1, I_2 deux intervalle de $\mathbb{R}$, si

$$I_1 \cap I_2 \neq \emptyset \Rightarrow I_1 \cup I_2 \text{ est un intervalle de } \mathbb{R}$$

Question A-t-on la réciproque?

Exercice

Soit l'ensemble suivant

$$A = \{x \in \mathbb{R}, (x-3)(x+2) \geq 0\} \cap [-4, 4]$$

1. Mettre l'ensemble A sous la forme d'un intervalle de $\mathbb{R}$ ou une réunion d'intervalles.
2. Pour quoi l'ensemble A , n'est pas un intervalle?

1.4.1 Voisinage d'un point

Définition

Soit $a \in \mathbb{R}$, on dit que V est un voisinage de a si et seulement si il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\subset V$,

Autrement dit: Un voisinage de a est un intervalle contenant un intervalle ouvert qui contient a .

Exemple

$]3, 4[$ est un voisinage de π . $] - \varepsilon, \varepsilon[$ est un voisinage de 0, $]3, 4[$ n'est pas un voisinage de 3.

1.4.2 Propriété d'Archimède

Définition $\mathbb{R}$ est Archimédien, si

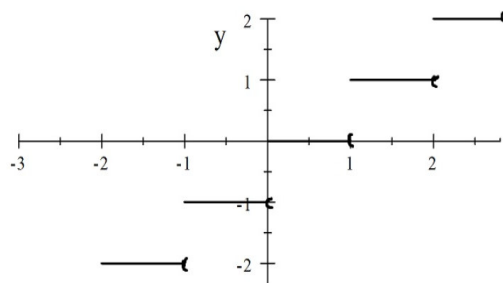
1. $\forall x > 0$, il existe un $n \in \mathbb{N}^*$, vérifiant $n > x$.
2. $\forall \varepsilon > 0$, il existe un $n \in \mathbb{N}^*$, vérifiant $\frac{1}{n} < \varepsilon$

La définition (1) nous permet de définir "**la partie entière**", tandis que La définition (2) sert à prouver des limites.

1.5 La partie entière

Définition: Soit x un nombre réel. Le plus grand entier inférieur ou égale à x s'appelle la partie entière de x on la note par $E(x)$ ou $[x]$.

Autrement dit: Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $E(x) \leq x < E(x) + 1$



- courbe représentative de la partie entière

Exemple

$$E(\pi) = 3, E(-\pi) = -4, E(-5) = -5, E(0,1) = 0, E(-7,1) = -8, E(2) = 2.$$

Exercice

Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations et l'inégalité suivantes

$$3E(x^2 + 2x) - 4 = 0, \quad E(x + a) = 2, a \in \mathbb{R}. \quad -1 \leq E(3x) \leq 1$$

Solution

1) Soit l'équation $3E(x^2 + 2x) - 4 = 0 \Rightarrow E(x^2 + 2x) = \frac{4}{3}$.

ce qui est impossible car $E(.) \in \mathbb{Z}$. donc $S = \emptyset$.

2) Soit l'équation $E(x + a) = 2, a \in \mathbb{R}$.

Puisque $2 \in \mathbb{Z}$, on a

$$\begin{aligned} E(x + a) &= 2 \Rightarrow 2 \leq x + a < 2 + 1 \\ &\Rightarrow 2 - a \leq x < 3 - a \end{aligned}$$

donc $S = [2 - a, 3 - a[$.

3) Soit l'inéquation

$$-1 \leq E(3x) \leq 1$$

On a

$$-1 \leq E(3x) \leq 1 \Rightarrow E(3x) \in \{-1, 0, 1\}, \text{ car } E(3x) \in \mathbb{Z}$$

$$E(3x) = -1 \Leftrightarrow -1 \leq 3x < -1 + 1 \Leftrightarrow 3x \in [-1, 0[$$

$$E(3x) = 0 \Leftrightarrow 0 \leq 3x < 0 + 1 \Leftrightarrow 3x \in [0, 1[$$

$$E(3x) = 1 \Leftrightarrow 1 \leq 3x < 1 + 1 \Leftrightarrow 3x \in [1, 2[$$

Ainsi

$$3x \in [-1, 0[\cup [0, 1[\cup [1, 2[= [-1, 2[\Leftrightarrow x \in \left[\frac{-1}{3}, \frac{2}{3} \right[$$

Propriétés: La partie entière a les propriétés suivantes.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $E(x) \leq x < E(x) + 1 \Leftrightarrow x - 1 < E(x) \leq x$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a $E(n) = n$.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, et pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a $E(x + n) = E(x) + n$. et $E(\frac{1}{n}E(nx)) = E(x)$.
4. Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ si $x \leq y$ alors $E(x) \leq E(y)$.
5. Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ on a $E(x + y) = E(x) + E(y) + \alpha$, $\alpha \in \{0, 1\}$.

Preuve: (3 Voir TD), (5 exercice)

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$E(x) \leq x < E(x) + 1 \Leftrightarrow 0 \leq x - E(x) < 1 \Leftrightarrow -x \leq -E(x) < 1 - x$$

Ainsi $x - 1 < E(x) \leq x$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a $E(n) = n$. ($\leq$ et $\geq$)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on sait que

$$E(x) \leq x < E(x) + 1 \Rightarrow E(n) \leq n < E(n) + 1 \leq E(n), \text{ car } n, E(n) \in \mathbb{Z}.$$

ce qui veut dire que si $n \in \mathbb{Z}$ on a $E(n) = n$.

4) Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ si $x \leq y$ alors $E(x) \leq E(y)$.

Raisonnons par l'absurde, supposons que $E(x) > E(y)$.

Puisque $E(x)$ et $E(y)$ sont dans $\mathbb{Z}$, on a

$$E(x) > E(y) \Rightarrow E(x) > E(y) + 1 \quad (1)$$

De plus, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$E(x) \leq x < E(x) + 1 \text{ et } E(y) \leq y < E(y) + 1 \quad (2)$$

De (1) et (2), on a

$$y < E(y) + 1 < E(x) \leq x$$

D'où $y < x$, qui est une contradiction avec l'hypothèse,

Conclusion

Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ si $x \leq y$ alors $E(x) \leq E(y)$. ■

1.5.1 Théorème (Densité)

Théorème 1.1 $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ c.à.d, si $x < y$; alors $\exists r \in \mathbb{Q}$, $x < r < y$.

Preuve: Supposons que $x, y \in \mathbb{R}^{+*}$, telque $x < y$ et soit $q = \left\lfloor \frac{1}{y-x} \right\rfloor + 1$ et $p = [qx]$

$$p = [qx] \Leftrightarrow p \leq qx < p + 1 \Leftrightarrow \frac{p}{q} \leq x < \frac{p+1}{q} = \frac{p}{q} + \frac{1}{q} < x + \frac{1}{q} \quad (1)$$

De plus

$$q = \left\lfloor \frac{1}{y-x} \right\rfloor + 1 \Leftrightarrow q - 1 = \left\lfloor \frac{1}{y-x} \right\rfloor$$

Ce qui implique que

$$q - 1 \leq \frac{1}{y-x} < q \Leftrightarrow \frac{1}{q} < y - x \leq \frac{1}{q-1} \Leftrightarrow \frac{1}{q} < y - x \leq \frac{1}{q-1} \Leftrightarrow \frac{1}{q} + x < y \leq \frac{1}{q-1} + x \quad (2)$$

D'où de (1) et (2), on a

$$x < \frac{p}{q} + \frac{1}{q} < x + \frac{1}{q} < y$$

Le rationnel recherché est ainsi $r = \frac{p}{q} + \frac{1}{q}$. ■

Grace a la densité des rationnels $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, on peut approximer n'importe quel réel aussi finement qu'on veut par des rationnels.

1.6 Bornes supérieure et borne inférieure

Dans tout ce qui suit, on suppose que E est une partie non vide de $\mathbb{R}$.

Majorant et minorant

- Un élément $M \in \mathbb{R}$ est un *majorant* de E si et seulement si $\forall x \in E, x \leq M$.
- Un élément $m \in \mathbb{R}$ est un *minorant* de E si et seulement si $\forall x \in E, x \geq m$.

Partie majorée, minorée, bornée

1. E est majorée si et seulement si E admet un majorant.
2. E est minorée si et seulement si E admet un minorant.
3. E est bornée si et seulement si E est à la fois majorée et minorée.

Exemple 1.1

- 1) $E_1 = \{1, 2, 3\}$, 3 est un majorant, 5 est un majorant, 1 un minorant.
- 2) $E_2 = [0, 2]$, 2 est un majorant, 0 un minorant, -1 un minorant.
- 3) $E_3 =]0, +\infty[$, pas de majorant, 0 est un minorant, -3 est un minorant.
- 4) $E_4 = \{\cos x \mid x \in \mathbb{R}\}$, 1 est majorant, -1 est minorant.

- **Axiome de la borne supérieure:**

Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

- **Axiome de la borne inférieure:**

Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

Définition 1 (Borne supérieure) Soit E non vide et majorée.

La borne supérieure de E , noté $\sup E$, est le plus petit des majorants de E .

$c, a, d \forall x \in E, x \leq \sup E$

Définition 2 (Borne inférieure) Soit E non vide et minorée.

La borne inférieure de E , noté $\inf E$, est le plus grand des minorants de E

$c, a, d \forall x \in E, x \geq \inf E$.

Minimum et maximum

- M est un *maximum* de E (noté $\max E$) si M majore E et $M \in E$.
- m est un *minimum* de E (noté $\min E$) si m minore E et $m \in E$.

Proposition 3 Soit E une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$.

1. Si $\max E$ existe alors $\sup E = \max E$.
2. Si $\sup E \in E$ alors $\max E$ existe de plus $\max E = \sup E$.

Proposition 4 Soit E une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$.

1. Si $\min E$ existe alors $\inf E = \min E$.
2. Si $\inf E \in E$ alors $\min E$ existe de plus $\min E = \inf E$.

Proposition 5 Soient A et B deux parties non vides et bornée de $\mathbb{R}$.

- 1) Si $A \subset B$ alors $(\sup A \leq \sup B)$ et $(\inf B \leq \inf A)$.
- 2) $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$
- 3) $\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$.

Preuve: (2 et 3 Voir TD),

- 1) A et B deux parties non vides bornée de $\mathbb{R}$. Montrer que, si

$$(A \subset B) \Rightarrow (\sup A \leq \sup B)$$

Supposons que $A \subset B$.

Soit x un élément de A . Alors x est un élément de B .

Or

B est majoré par $\sup B$, donc $x \leq \sup(B)$

Autrement dit

$\sup(B)$ est un majorant de A .

Mais $\sup(A)$ est le plus petit des majorants de A
donc $\sup(A) \leq \sup(B)$. ■

1.6.1 Caractérisation de la borne supérieure

Proposition 6 Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}$. On a :

$$M = \sup A \iff \begin{cases} M \text{ majore } A, (\forall x \in A, x \leq M) \\ \forall \varepsilon > 0 \exists x \in A \text{ tel que } M - \varepsilon < x. \end{cases}$$

1.6.2 Caractérisation de la borne inférieure

Proposition 7 Soit A une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{R}$. On a :

$$m = \inf A \iff \begin{cases} m \text{ minore } A, (\forall x \in A, m \leq x) \\ \forall \varepsilon > 0 \exists x \in A \text{ tel que } x < m + \varepsilon. \end{cases}$$

1.6.3 Caractérisation séquentielle des bornes supérieure et inférieure

Proposition 8 {Caractérisation séquentielle de la borne supérieure}

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et le réel $M = \sup A$ si et seulement si

- 1) M est un majorant de A .
- 2) il existe une suite de nombre $u_n \in A$ qui converge vers M .

Proposition 9 {Caractérisation séquentielle de la borne inférieure}

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et le réel $m = \inf A$ si et seulement si

- 1) m est un minorant de A .
- 2) il existe une suite de nombre $v_n \in A$ qui converge vers m .

Exemple 1.2 Soient les sous-ensembles suivants:

$$A =]0, 1[\cup \{\pi\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R}, 1 < x \leq 3\}, \quad C = \left\{ \frac{n}{n+m}, n, m \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

- 1) Pour chaque ensemble proposé, déterminer (si elles existent) : la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément.

- 2) Pour l'ensemble B , prouver la réponse à l'aide de la caractérisation.
 3) Pour l'ensemble C , prouver la réponse à l'aide de la caractérisation séquentielle

Solution 10

1) Soit $A =]0, 1[\cup \{\pi\}$,

Posons $I =]0, 1[$ et $J = \{\pi\}$, on a $\sup I = 1$ et $\sup J = \pi$

Donc d'après la (Proposition 5 ligne 3), $\sup(I \cup J) = \max\{\sup I, \sup J\}$, on a

$$\sup A = \sup(]0, 1[\cup \{\pi\}) = \max\{1, \pi\} = \pi$$

et puisque $\sup A \in A$ alors $\max A = \sup A = \pi$.

De même $\inf I = 0$ et $\inf J = \pi$

Donc d'après la (Proposition 5, ligne 4) $\inf(I \cup J) = \min\{\inf I, \inf J\}$, on a

$$\inf A = \inf(]0, 1[\cup \{\pi\}) = \min\{0, \pi\} = 0$$

et puisque $\inf A \notin A$ alors $\min A = \nexists$.

2) Soit $B = \{x \in \mathbb{R}, 1 < x \leq 3\}$

Il est clair que $B \neq \emptyset$, car $3 \in B$, de plus $\forall x \in B$ on a $1 < x \leq 3$, donc B est majoré par 3 et minoré par 1, donc la borne supérieure et inférieure existent.

a) Montrons que $\sup B = 3$

On a $\forall x \in B, x \leq 3$ donc 3 est un majorant de B , ainsi $\sup B \leq 3$. Mais $3 \in B$, donc $3 \leq \sup B$ ainsi $3 = \sup B$.

Puisque $3 \in B$, $\sup B = \max B = 3$.

b) Montrons que $\inf B = 1$.

$$1 = \inf B \iff \begin{cases} \forall x \in B, 1 \leq x \text{ (vérifier)} \\ \forall \varepsilon > 0 \exists x \in B \text{ tel que } x < 1 + \varepsilon. \end{cases}$$

Maintenant montrons qu'il existe $x \in B$ tel que $x < 1 + \varepsilon$.

On a deux cas

Si $\varepsilon > 2$, donc $\forall x \in B, x < 1 + \varepsilon$

Si $0 < \varepsilon \leq 2$ il suffit de prendre $x = 1 + \frac{\varepsilon}{2}$ pour que $x < 1 + \varepsilon$, en effet

$$0 < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon < 2 \Leftrightarrow 1 < 1 + \frac{\varepsilon}{2} < 1 + \varepsilon < 3$$

Puisque $1 \notin B$, $\min B = \nexists$.

3) Soit $C = \left\{ \frac{n}{n+m}, n, m \in \mathbb{N}^* \right\}$.

C n'est pas vide car $\frac{1}{2} \in C$, ($n = 1, m = 1$).

En plus C est bornée, en effet

$\forall n, m \in \mathbb{N}^*$ on a $0 < n < m + n$ d'où $0 < \frac{n}{m+n} < 1$.

Donc C est majorée par 1 et minorée par 0, ce qui veut dire que les bornes sup et inf existent.

Maintenant à l'aide de la caractérisation séquentielle des bornes supérieure et inférieure, montrons que $\sup C = 1, \inf C = 0$.

$$1 = \sup C \iff \begin{cases} 1 \text{ majore } C, (\forall x \in C, x \leq 1) \\ \text{il existe une suite } (u_k) \in C, \text{ tel que } u_k \rightarrow 1. \end{cases}$$

On a vu que C est majorée par 1.

Pour construire une suite de C qui tend vers 1, on prend $m = 1$ et $n = k$.

Ainsi $u_k = \frac{k}{k+1} \in C$ et $u_k \rightarrow 1$.

montrons que $\inf C = 0$.

$$0 = \inf C \iff \begin{cases} 0 \text{ minore } C, (\forall x \in C, x \geq 0) \\ \text{il existe une suite } (u_k) \in C, \text{ tel que } u_k \rightarrow 0. \end{cases}$$

On a vu que C est minorée par 0.

Pour construire une suite de C qui tend vers 0, on prend $m = k$ et $n = 1$.

Ainsi $u_k = \frac{1}{1+k} \in C$ et $u_k \rightarrow 0$.

Puisque $\sup C \notin C$ donc $\max C$ n'existe pas de même pour $\min C$ n'existe pas.

1.7 Exercices

Exercice 1

Soient $r_1 = 0, 2023$, $r_2 = 0, 20232023\dots 2023$ (n fois) et $r_3 = 0, 20232023\dots$ (une infinité de fois).

- 1) Ecrire les nombres r_1 , r_2 , r_3 sous la forme rationnelle.
- 2) Montrer que si a^2 est un multiple de 2, alors a est un multiple de 2.
- 3) On rappelle que $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$. Montrer alors par l'absurde que $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ est irrationnel.
- 4) Sachant que π est irrationnel, démontrer que $(\frac{3}{\pi})$ est irrationnel.
- 5) Sachant que $\sqrt{2}$ est irrationnel
- a) Montrer que $a = 6 + 4\sqrt{2}$ et $b = 6 - 4\sqrt{2}$ sont irrationnels.
- b) Calculer $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$ puis montrer que $(\sqrt{a} + \sqrt{b})$ est rationnel.
- 6) Montrer que si n est un nombre premier alors $\sqrt{n}$ est irrationnel.
- 7) Montrer que $\forall (p, q) \in \mathbb{N}$, $p \neq q : (\sqrt{p} + \sqrt{q}) \notin \mathbb{Q} \Rightarrow (\sqrt{p} - \sqrt{q}) \notin \mathbb{Q}$.
- 8) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\sqrt{\frac{n}{n+2}} \notin \mathbb{Q}$.
- 9) Soit $n \in \mathbb{N}$, si n n'est pas un carré parfait alors $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$.
- 10) Soit $n, m \in \mathbb{N}$, qui ne sont pas des carrés parfaits alors $\sqrt{n} + \sqrt{m} \notin \mathbb{Q}$.
- 11) Montrer que si $x \in \mathbb{Q}$ et $y \notin \mathbb{Q}$ alors $x + y \notin \mathbb{Q}$.
- 12) Montrer que si $x \in \mathbb{Q}^*$ et $y \notin \mathbb{Q}$ alors $x \times y \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 2

- 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$: $|x - 2| + |x - 3| = 3$, puis $|2x^2 - 1| \leq |x + 1|$
- 2) Soient x et y deux réels, montrer que:
 - a) $|x| + |y| \leq |x + y| + |x - y|$.
 - b) $1 + |xy - 1| \leq (1 + |x - 1|)(1 + |y - 1|)$.
 - c) $||x| - |y|| \leq |x - y| \leq |x| + |y|$.
 - d) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \frac{|x|}{1 + |x|}$.
Montrer que $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$.

Exercice 3

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} E\left(\frac{2x+1}{3}\right) - 2 &= 0, & E(x+a) &= 2, a \in \mathbb{R}. & 3E(x^2+2x) - 4 &= 0, \\ E(x) &\geq 1, & -1 \leq E(3x) &\leq 1, & E(x) + |x-1| &= x, \end{aligned}$$

2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a $E(x+n) = E(x) + n$ puis $E\left(\frac{1}{n}E(nx)\right) = E(x)$.

3) Soient $x, y \in \mathbb{R}$, montrer que

$$E(x) + E(y) \leq E(x+y) \text{ puis } E(x+y) \leq E(x) + E(y) + 1.$$

4) Montrer que $\forall p \in \mathbb{Z}$ on a $E(p) + E(-p) = 0$.

5) Montrer que $\forall p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on a $E(p) + E(-p) + 1 = 0$.

Exercice 4

1) Donner la définition d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

2) Soit les sous-ensembles suivants:

$$A = \{x \in \mathbb{R}, x^2 < 1\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R}, (x-3)(x+2) \geq 0\} \cap [-4, 4], \quad C = \{x \in \mathbb{R}^*, \frac{1}{x} > 2\}.$$

a) Mettre ces ensembles sous la forme d'un intervalle de $\mathbb{R}$ ou une réunion d'intervalles.

b) Pour quoi l'ensemble B , n'est pas un intervalle?

c) Déterminer les majorants, les minorants, la borne supérieure et la borne inférieure dans $\mathbb{R}$ (si elles existent), et préciser s'il y a un maximum et un minimum.

Exercice 5 Soient les sous-ensembles suivants:

$$A = \left\{ \frac{x+1}{x+2}, x \in \mathbb{R}, x \leq -3 \right\}, \quad B = \left\{ \frac{n+3}{n+2}, n \in \mathbb{N} \right\}, \quad C = \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n^2}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

$$D = \left\{ 2 - \frac{8}{n+4}, n \in \mathbb{N} \right\}, \quad E = \left\{ \frac{(-1)^n}{n+1} + \frac{(-1)^n + 2}{3}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

1) Pour les ensembles $(A, B, C, D \text{ et } E)$, Déterminer (s'ils existent) : les majorants, les

minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément.

2) A l'aide de la caractérisation des bornes supérieure et inférieure, montrer que

$$\sup([0, 2]) = 2, \quad \inf([0, 2]) = 0, \quad \sup B = \frac{3}{2}, \quad \inf B = 1$$

3) Meme question pour l'ensemble D .

Exercice 6 Soient les sous ensembles suivants:

$$A = \{x \in \mathbb{R}, 0 < x \leq 2\}, \quad B = \left\{5 - \frac{2}{\sqrt{n}}, n \in \mathbb{N}^*\right\}, \quad C = \left\{\frac{1}{x-1}, x \geq 2\right\}, \quad D = \left\{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}; p, q \in \mathbb{N}^*\right\}$$

1) Pour chaque ensemble proposé, déterminer (si elles existent) : la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément.

2) Pour les ensembles (A, B, C) , justification à l'aide de la caractérisation " ε ".

3) Pour l'ensemble D , justification à l'aide de la caractérisation séquentielle.

Exercice 7 Soient les sous-ensembles suivants:

$$A = \left\{\frac{n}{2n+1}, n \in \mathbb{N}\right\}, \quad B = A \cup \{\pi\}, \quad C = \left\{\frac{(-1)^n + 3}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\},$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - [(2 - \pi)]| \leq 3\}, \quad E = \{0, 25; 0, 2525; \dots; 0, 252525\dots\}$$

1) Déterminer (si elles existent): les bornes supérieures et inférieures, Justifier.

2) Les ensembles possède-t-elles un maximum, un minimum? Justifier

3 Montrer que l'ensemble B n'est pas un intervalle de $\mathbb{R}$.

Exercice 8

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation, $E(|x + 3|) = 1$.

où $E(\cdot)$ désigne la partie entière d'un réel telle que $E(\cdot) \in \mathbb{Z}$ et $|\cdot| \in \mathbb{R}^+$.

2) Soit

$$I = \{x \in \mathbb{R}, (x - 3)(x + 2) \geq 0\} \cap [-4, 5[.$$

a) Montrer que I est la réunion de deux intervalles.

b) Déterminer (s'ils existent) : les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne

inférieure, le maximum et le minimum de I .

1.8 Corrigée de quelques exercices

Exercice 1

3) Supposons par l'absurde qu'il existe $r \in \mathbb{Q}$, tel que $\sqrt{2} + \sqrt{5} = r$.

$$\sqrt{2} + \sqrt{5} = r \Leftrightarrow \sqrt{2} = r - \sqrt{5} \Leftrightarrow (\sqrt{2})^2 = r^2 + 5 - 2r\sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{5} = \frac{r^2 + 3}{2r} \in \mathbb{Q}. \text{ Absurde.}$$

Conclusion

$$\sqrt{2} + \sqrt{5} \notin \mathbb{Q}.$$

5) Sachons que le nombre $\sqrt{2}$ est irrationnel.

1. (a) Procédons par l'absurde et supposons que

$$\alpha = 6 + 4\sqrt{2} \in \mathbb{Q} \text{ et } \beta = 6 - 4\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$$

on a

$$\begin{cases} \alpha = 6 + 4\sqrt{2} \\ \beta = 6 - 4\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2} = \frac{\alpha-6}{4} \\ \sqrt{2} = \frac{6-\beta}{4} \end{cases}$$

Comme $\mathbb{Q}$ est un corps, et puisque $\alpha \in \mathbb{Q}$ et $\beta \in \mathbb{Q}$,

alors

$$\begin{cases} \alpha - 6 \in \mathbb{Q} \Rightarrow \frac{\alpha-6}{4} \in \mathbb{Q} \\ 6 - \beta \in \mathbb{Q} \Rightarrow \frac{6-\beta}{4} \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

ce qui est une contardiction car $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Alors $\alpha = 6 + 4\sqrt{2}$ et $\beta = 6 - 4\sqrt{2}$ sont irrationnels.

(b) Montrer que le nombre $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ est rationnel.

$$(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 = \alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta} = 6 + 4\sqrt{2} + 6 - 4\sqrt{2} + 4 = 16$$

Comme $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} \geq 0$ on a $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = 4$.

10) Il s'agit de démontrer que si: $x \in \mathbb{Q}$ et $y \notin \mathbb{Q}$ alors $x + y \notin \mathbb{Q}$.

Supposons par l'absurde qu'il existe

$$x \in \mathbb{Q} \text{ et } y \notin \mathbb{Q} \text{ tels que } x + y = r \in \mathbb{Q}.$$

D'où $y = r - x$. Comme $\mathbb{Q}$ est un corps

$$r \in \mathbb{Q} \text{ et } x \in \mathbb{Q} \Rightarrow (r - x) \in \mathbb{Q}.$$

Donc $y \in \mathbb{Q}$. Absurde, car $y \notin \mathbb{Q}$ et $(\mathbb{Q} \cap \overline{\mathbb{Q}} = \emptyset)$.

Exercice 2

2) a) Il s'agit de démontrer que $|x| + |y| \leq |x + y| + |x - y|$

On sait que pour $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$|2x| = 2|x| = |x + y + x - y| \leq |x + y| + |x - y|.$$

$$|2y| = 2|y| = |y + x + y - x| \leq |x + y| + |x - y|$$

Ainsi

$$2|x| + 2|y| \leq 2|x + y| + 2|x - y|$$

d'où

$$|x| + |y| \leq |x + y| + |x - y|$$

Exercice 3

3) Pour $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$E(x) \leq x < E(x) + 1.$$

$$E(y) \leq y < E(y) + 1.$$

Ainsi

$$E(x) + E(y) \leq x + y. \quad (*)$$

D'autre part

$$E(x+y) \leq x+y < E(x+y) + 1. \quad (**)$$

De (*) et (**) on a

$$E(x) + E(y) < E(x+y) + 1.$$

Puis que $E(x), E(y), E(x+y) \in \mathbb{Z}$, alors on a

$$E(x) + E(y) \leq E(x+y).$$

Exercice 8

1) Par la définition de la partie entière d'un réel, on a

$$E(|x+3|) = 1 \Leftrightarrow 1 \leq |x+3| < 2 \quad (*)$$

Si $x+3 \geq 0$, i.e $x \geq -3$, alors :

$$(*) \Leftrightarrow 1 \leq x+3 < 2 \Leftrightarrow -2 \leq x < -1.$$

Ainsi $x \geq -3$ et $-2 \leq x < -1$. D'où $x \in [-2, -1[$.

Si $x+3 \leq 0$, i.e $x \leq -3$, alors:

$$(*) \Leftrightarrow -2 < x+3 \leq -1 \Leftrightarrow -5 < x \leq -4.$$

Ainsi $x \leq -3$ et $-5 < x \leq -4$. D'où $x \in]-5, -4]$.

Conclusion

$$E(|x+3|) = 1 \Leftrightarrow x \in]-5, -4] \cup [-2, -1[.$$

2)

$$I = \{x \in \mathbb{R}, (x-3)(x+2) \geq 0\} \cap [-4, 5[$$

a) Montrer que I est la réunion de deux intervalles

$$(x-3)(x+2) \geq 0 \text{ si } (x \in]-\infty, -2] \cup [3, +\infty[),$$

$$\text{Donc } I = (]-\infty, -2] \cup [3, +\infty[) \cap [-4, 5[$$

Conclusion $I = [-4, -2] \cup [3, 5[$

b) Déterminer (s'ils existent) : les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le maximum et le minimum de I .

- L'ensemble des majorants de I sont $[5, +\infty[$.
- L'ensemble des minorants de I sont $] -\infty, -4]$.
- La borne supérieure de I est 5.
- La borne inférieure de I est -4 .
- Le maximum n'existe pas. et le minimum de I est -4 .