Université de Tlemcen
Faculté des Sciences
L3 Mathématiques
2025/2026
Introduction au Processus Aléatoires

TD n° 2

Exercice 1.

Soient $a,\ b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ la tribu de Borel sur $\mathbb{R}$. Montrer que les ensembles suivants sont des éléments de $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$:

$$]a,+\infty[, \quad]a,b], \quad \{a\}, \quad [a,+\infty[, \quad [a,b], \quad]a,b[, \quad [a,b[, \quad]-\infty,b[, \quad \mathbb{N}, \quad \mathbb{Z}.$$

Exercice 2. *(Formule d'Euler)*

On fixe $n \geq 1$ et on choisit dans $\{1,2,\ldots,n\}$ un nombre d'une manière équiprobable. Si $p \leq n$ on note A_p :"le nombre choisi est divisible par p".

(1) Calculer $\mathbb{P}(A_p)$ lorsque p est un diviseur de n.

(2) Si $p_1,\ p_2,\ldots,\ p_k$ sont des diviseur premier deux à deux distincts de n, montrer que les événements associés $(A_i)_{1\leq i\leq k}$ sont indépendants.

(3) On appelle indicateur d'Euler, que l'on note $\varphi(n)$, le nombre d'entiers strictement inférieurs à n et premiers avec n. Montrer que l'on a :

$$\frac{\varphi(n)}{n} = \prod_{p \text{ premier},\ p\backslash n} (1 - \frac{1}{p})$$

N. B. $p\backslash n$: *p divise n.*

Exercice 3.

Soient $\{A_n, n \geq 1\}$ une suite d'évènements indépendants.

(1) Vérifier par trois méthodes diffeéntes que $e^{-x} \geq 1 - x$ pour tout $x \geq 0$.

(2) En déduire que pour $1 \leq n \leq m$:

$$\mathbb{P}(\bigcap_{k=n}^{m} \overline{A_k}\ ) \leq e^{-\sum_{k=n}^{m}\mathbb{P}(A_k)}.$$

(3) Montrer que

$$\sum_{n\geq 1}\mathbb{P}(A_n) = +\infty \Longrightarrow \mathbb{P}\big(\limsup_{n\to+\infty} A_n\big) = 1.$$

(4) Quelles sont les valeurs possibles de

$$\mathbb{P}\big(\limsup_{n\to+\infty} A_n\big).$$

Exercice 4.

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v. a. r. Montrer que $\sup_{n\geq 1} X_n,\ \inf_{n\geq 1} X_n, \limsup_{n\to\infty} X_n$, $\liminf_{n\to\infty} X_n$ et $\lim_{n\to\infty} X_n$ sont des v. a. r.

Exercice 5.

Soient X une variable aléatoire réelle.

(1) Montrer que si $\mathbb{E}(|X|) < \infty$, alors $x\mathbb{P}(|X| > x) = o(1)$, lorque $x \to \infty$.

(2) Pour cette question on suppose que X est **positive** et que $\mathbb{E}(X) < \infty$, montrer que

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq t)dt.$$

(3) En déduire que si $\mathbb{E}(|X|^p) < \infty$ pour $p \geq 1$, alors

$$\mathbb{E}(|X|^p) = p\int_0^{+\infty} t^{p-1}\mathbb{P}(|X| \geq t)dt.$$

(4) Trouver un encadrement pour $\sum_{k\geq 1} \mathbb{P}(|X| > k)$, en fonction de $\mathbb{E}(|X|)$.

Exercice 6.

Soit X une variable aléatoire réelle discète à valeurs dans $\mathbb{N}$ avec $\mathbb{E}(X) < \infty$.

(1) Exprimer $\mathbb{P}(X = k)$ en fonction de $\mathbb{P}(X \geq k)$ et de $\mathbb{P}(X = k + 1)$.

(2) Montrer que

$$\forall n \geq 1,\ \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X \geq k) - n\mathbb{P}(X \geq n + 1).$$

(3) En déduire $\mathbb{E}(X)$.