Université de Tlemcen 2025/2026
Faculté des Sciences
L3 Mathématiques
Introduction au Processus Aléatoires

TD n° 1

Exercice 1.
Soient Ω un espace échantillon, $\mathcal{A}$ une algèbre sur Ω et $\mathcal{F}$ une tribu sur Ω.

(1) Montrer que si $n \geq 1$ et $A_1, A_2, ..., A_n$ des éléments de $\mathcal{A}$, alors
$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{A} \quad \text{et} \quad \bigcap_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{A}.$$
(2) Montrer que si $\{A_1, A_2, ...,\}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{F}$, alors
$$\bigcap_{k\geq 1} A_k \in \mathcal{F}.$$

Exercice 2.
I. Soient Ω un espace échantillon, $\mathcal{A}_1,\ \mathcal{A}_2$ deux algèbres sur Ω et $\mathcal{F}_1,\ \mathcal{F}_2$ deux tribus sur Ω.

(1) Montrer que $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$ est encore une algèbre.
(2) Montrer que $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ est encore une tribu.

II. Pour $A \in \Omega$ on rappelle que la **tribu engendrée** par A, notée $\sigma(A)$, est donnée par
$$\sigma(A) := \{\emptyset,\ \Omega,\ A,\ \bar{A}\}.$$
Posons $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, donner A et B deux sous-ensembles de Ω tels que $\sigma(A) \cup \sigma(B)$ ne soit pas une algèbre.

III. Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une application, on pose :
$$\sigma(X) := \{X^{-1}(A),\ A \subset \mathbb{R}\}.$$
Montrer que $\sigma(X)$ est une tribu sur Ω. (appelée la **tribu engendrée** par X)

Exercice 3. (*Algèbre oui, Tribu non merci*)
Posons
$$\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}),\ card(A) \text{ est fini où } card(\overline{A}) \text{ est fini}\}.$$
Montrer que $\mathcal{A}$ est une algèbre sur $\mathbb{R}$, mais pas une tribu.

Exercice 4.
Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, $A,\ B,\ C$ et D des événements de Ω avec

$C \subset D$.

(1) Montrer que $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

(2) Trouver une equation entre $\mathbb{P}(C)$, $\mathbb{P}(D)$ et $\mathbb{P}(D/C)$ (il n'est pas interdit de dessiner).

(3) En déduire que $\mathbb{P}(C) \leq \mathbb{P}(D)$ ($\mathbb{P}$ est croissante).

(4) Montrer que $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

Exercice 5.
Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilités, $A, B \in \mathcal{F}$ avec $\mathbb{P}(A) = 1/3,\ \mathbb{P}(B) = 1/4$ et $\mathbb{P}(A \cap B) = 1/6$. Calculer

$$\mathbb{P}(\overline{A}),\ \mathbb{P}(\overline{A} \cup B),\ \mathbb{P}(A \cup \overline{B}),\ \mathbb{P}(A \cap \overline{B}),\ \mathbb{P}(\overline{A} \cup \overline{B}).$$

Exercice 6. (*Continuité de la probabilité*)
Soient $\{A_n,\ n \geq 1\}$ (resp. $\{B_n,\ n \geq 1\}$) une suite croissante (resp. décroissante) de $\mathcal{F}$. Considérons les deux assertions suivantes :

$$\mathbb{P}(\bigcup_{n\geq 1} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n). \tag{1}$$

et

$$\mathbb{P}(\bigcap_{n\geq 1} B_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(B_n). \tag{2}$$

(1) Montrer que ces deux assertions sont équivalentes.

(2) Notre but à présent est de prouver (1). Pour ce faire, on pose $C_1 = A_1$ et $C_n = A_n \backslash A_{n-1}$ pour $n \geq 2$.
- Vérifier que $\{C_n,\ n \geq 1\}$ est une suite d'événements 2 à 2 incompatibles.
- Calculer $\cup_{k=1}^n C_k$.
- En déduire l'équation (1).

Exercice 7.
Pour une suite $\{A_n,\ n \geq 1\}$ de $\mathcal{F}$ on pose :

$$\limsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} A_k \quad \text{et} \quad \liminf_{n\to\infty} A_n := \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{k\geq n} A_k.$$

(1) Comparer les deux ensembles.

(2) Vérifier que

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \left\{ \omega \in \Omega;\ \sum_{n\geq 1} \mathbb{1}_{A_n}(\omega) = +\infty \right\}.$$

(3) Montrer que

$$\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(A_n) < \infty \implies \mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = 0.$$