



T.D N°1 : Notions topologiques dans $\mathbb{R}^n$

Exercice 1

Soient (E, d) un espace métrique, X un ensemble quelconque et f une application de X dans E injective.

Montrer que $\delta(x, y) = d(f(x), f(y))$ est une distance dans X .

Exercice 2

Soit $\alpha > 0$. On pose pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\|(x, y)\|_\alpha = \sqrt{\alpha^2 x^2 + y^2}$

1. Montrer que $\|\cdot\|_\alpha$ est une norme de $\mathbb{R}^2$.
2. Faites une représentation de la boule $B(0_{\mathbb{R}^2}, 1)$ dans $\mathbb{R}^2$ pour la norme $\|\cdot\|_\alpha$.
3. Montrer que la norme $\|\cdot\|_\alpha$ et la norme euclidienne $\|\cdot\|_2$ de $\mathbb{R}^2$ sont équivalentes.

Exercice 3

Considérons l'application $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$

$$(x, y) \mapsto d(x, y) = |e^{-x} - e^{-y}|$$

Montrer que d est une distance qui n'est induite par aucune norme de $\mathbb{R}$.

Exercice 4

Un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ est une application de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$x \cdot y = \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

1. Vérifier que, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:
 i. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ ii. $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$
 iii. $\langle x, x \rangle \geq 0$ iv. $\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$
2. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ où $\|\cdot\|_2$ est la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.
3. Montrer que (Inégalité de Cauchy-Schwartz)

$$\langle x, y \rangle^2 \leq (\langle x, x \rangle) \cdot (\langle y, y \rangle) \text{ i.e. } \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right)$$

4. Montrer les identités suivantes :

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (\|x + y\|_2^2 - \|x - y\|_2^2)$$

$$\|x + y\|_2^2 + \|x - y\|_2^2 = 2(\|x\|_2^2 + \|y\|_2^2)$$

Exercice 5 (Supp)

On définit sur $\mathbb{R}^2$ les normes suivantes

$$N_1(x, y) = \|(x, y)\|_1 = |x| + |y|$$

$$N_2(x,y) = \|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$N_\infty(x,y) = \|(x,y)\|_\infty = \max(|x|, |y|)$$

1. Montrer que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : N_\infty(x,y) \leq N_2(x,y) \leq N_1(x,y) \leq 2N_\infty(x,y).$$

2. En déduire que les trois normes sont équivalentes deux à deux.

Exercice 6

Soit $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. On pose

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|, \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \text{ et } \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} (|x_i|).$$

1. Montrer que $\|\cdot\|_2$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty \text{ et } \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty$$

Discuter le cas $n = 1$

3. Représenter dans $\mathbb{R}^2$ la boule unité fermée

$$\bar{B} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x,y)\| \leq 1\}$$

par chacune des normes $\|x\|_1$, $\|x\|_2$ et $\|x\|_\infty$.

Exercice 7

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On considère les deux normes définies sur E par :

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx \text{ et } \|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|.$$

1. Montrer que $\forall f \in E, \|f\|_1 \leq \|f\|_\infty$.

2. On considère la suite de fonctions $f_n(x) = x^n$ pour $x \in [0, 1]$.

a. Calculer $\|f_n\|_1$ et $\|f_n\|_\infty$.

b. On déduit que ces deux normes ne sont pas équivalentes.

Exercice 8

Soit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$.

1. Soient $p, q \in]1, +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Montrer que $\forall s, t \geq 0$

$$st \leq \frac{1}{p} s^p + \frac{1}{q} t^q$$

$$st = \frac{1}{p} s^p + \frac{1}{q} t^q \Leftrightarrow s^p + t^q$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose

$$\|\cdot\|_p = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } 1 \leq p < +\infty \\ \max_{1 \leq i \leq n} (|x_i|) & \text{si } p = +\infty \end{cases}$$

Soient $p, q \in]1, +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Montrer que $\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$a. \left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q \right)^{\frac{1}{q}} \quad (\text{Inégalité de Hölder})$$

$$b. \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right) \quad (\text{Inégalité de Minkowski})$$

Exercice 9

Soit $\|\cdot\|$ une norme sur l'espace vectoriel normé $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, on a l'inégalité :

$$||x| - |y|| \leq \|x - y\|$$

2. Dédurre que si une suite de vecteurs $x_k \in \mathbb{R}^n$ converge dans l'espace dans l'espace vectoriel normé $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$, alors $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|x_k\| = \left\| \lim_{k \rightarrow +\infty} x_k \right\|$

3. Soient x_k et y_k deux suites vectoriels de $\mathbb{R}^n$.

Montrer que $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = a \in \mathbb{R}^n$ et $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|x_k - y_k\| = 0$ alors $\lim_{k \rightarrow +\infty} y_k = a$.