Université Abou Bekr Belkaid - Tlemcen
Faculté des sciences
Département de mathématiques

Année universitaire: 2025 - 2026
Module: Analyse 4
L2 Mathématiques

T.D N°3 : Intégrales doubles et triples

Exercice 1:

Définir les bornes d'intégrations : $\iint_D f(x,y)\,dxdy$

1) D est limité par les droites: $x=2,\ x=3,\ y=-1,\ y=5$
2) D est la surface du rectangle de sommets $A(1,3), B(1,4), C(2,3), E(2,4)$
3) D est limité par le triangle de sommets $O(0,0), M(2,0), N(2,1)$
4) D le trapèze limité par les droites: $y=0,\ y=1,\ y=2-x,\ y=1+\frac{x}{2}$
5) D est délimité par les courbes: $y=0, y=1-x^2$
6) D est délimité par les courbes: $y=x^2, x=y^2$
7) D est le disque: $x^2+y^2\leq 2$

Exercice 2:

1) Définir et dessiner le domaine d'intégration D du plan tel que:

$$\iint_D e^{-x}dxdy=\int_0^{\ln 2}\left[\int_{e^x}^{2} e^{-x}dy\right]dx$$

2) Calculer l'intégrale double et vérifier que l'on obtient le même résultat en intervertissant l'ordre d'intégration
3) Calculer l'aire du D.

Exercice 3: Calculer les intégrales doubles suivantes

1) $\iint_D \ln(x+y+1)\,dxdy$, où D est la surface du triangle de sommets $O, A(1,0)$ et $B(0,1)$
2) $\iint_D (x-y)\,dxdy$, où D est limités par les courbes $y=2-x^2$ et $y=2x-1$
3) $\iint_D (x^2-y^2)\,dxdy$ où D est limités par l'ellipse $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$
4) $\iint_D (x^2+y^2+1)\,dxdy \quad D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, x^2+y^2-2y\leq 0\}$

Exercice 4:

Soit D le domaine délimité par les droites: $x=0,\ y=x+2$ et $y=-x$

1) Calculer (directement) $I=\iint_D (x-y)\,dxdy$
2) Calculer I au moyen du changement de variables $u=x+y$ et $v=x-y$

Exercice 5:

Calculer les intégrales triples suivantes

1) $\iiint_D (x+y+z)^2\,dxdydz$ avec $D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0, x+y+z\leq 1\}$
2) $\iiint_D xyz\,dxdydz$ où $D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0,\ x^2+y^2+z^2\leq 1\}$
3) $\iiint_V \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ où $V=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ x^2+y^2+\leq z^2,\ 0\leq z\leq 1\right\}$

Exercice 6:

1) Calculer l'intégrale triple suivante:

$I = \iiint_V dxdydz$ où V est limité par la sphère de centre O et et de rayon R

2) Que représente les valeurs de I

Exercice 7:

On se propose de calculer l'intégrale de Gauss $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ fondamentale en probabilités, statistiques...

On note R un réel stictement positif et:

C_R: le carré $[0,R]\times[0,R]$, D_R^1 : le disque de centre O et de rayon R, D_R^2 : le disque de centre O et de rayon $\sqrt{2}\,R$

$I_R = \iint_{D_R^1} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy$, $J_R = \iint_{D_R^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy$, $K_R = \iint_{C_R} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy$

1) Tracer les domaines C_R, D_R^1 et D_R^2

2) Expliquer pourquoi $I_R \leq K_R \leq J_R$

3) En utilisant les coordonées polaires, calculer I_R et J_R

4) déterminer $\lim\limits_{R\to+\infty} I_R$ et $\lim\limits_{R\to+\infty} J_R$ et en déduire $\lim\limits_{R\to+\infty} K_R$

5) Exprimer K_R en fonction $\int_{-R}^{-R} e^{-x^2}\,dx$ et en déduire la valeur de l'intégrale de Gauss $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$

Exercice supplémentaire

Calculer les intégrales doubles suivantes

1) $\iint_D \frac{dxdy}{1+x^2+y^2}$ D est le disque: $x^2+y^2 \leq 1$

2) $\iint_D (x+y)\,dxdy$, $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2, 0\leq x\leq 1, x^2\leq y\leq x\}$

3) $\iint_D xy\,dxdy$, D trapèze limité par les droites: $y=0, y=1, y=2-x,\ y=1+\frac{x}{2}$.

4) $\iint_D y^2\,dxdy$, $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2, 0\leq x\leq y^2,\ y\leq 3\}$.

5) $\iint_D (2x-y)^2\,dxdy$ D est limité par les droites: $y=x$, $y=2x$, $y=x+1$ et $y=2x-2$

6) $\iint_D x^2\,dxdy$ $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2, x\geq 0, 1\leq x^2+y^2\leq 2\}$

4) $\iint_D (2x-y)\,dxdy$ D l'ensemble des points du disque de centre 0 et de rayon 1 tels que: $0\leq y\leq x$

7) $\iint_D \frac{1}{x^2+y^2}\,dxdy$ où D est la couronne decentre 0 et de ryon 2 et 4

14) $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$ avec D secvteur de centre 0 et d'extrimités $A(\sqrt{3},1), B(\sqrt{3},-1)$.

5) $\iint_D (y-x)\,dxdy$ D est limité par les droites: $y=x+1$, $y=x-3$, $y=-\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}$ et $y=-\frac{1}{3}x+5$

(penser à un changement de variables)

8) $\iiint_V (x^2+y^2+z^2)\,dxdydz$ où V est limité par la sphère de centre O et et de rayon R

9) $J = \iiint_V dxdydz$ où V est limité par l'ellipsoïde: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = 1$