Université Abou Bekr Belkaid - Tlemcen
Faculté des sciences
Département de mathématiques

Année universitaire: 2025 - 2026
Module: Analyse 4
L2 Mathématiques

T.D N°2 : Fonctions de plusieur variables

Exercice 1

1. Dans chaque cas, déterminer et représenter le domaine de définition des fonctions suivantes :

$f_1(x,y) = \dfrac{\sqrt{x^2-y}}{\sqrt{y}}$, $f_2(x,y) = \dfrac{\ln y}{\sqrt{x-y}}$, $f_3(x,y) = \ln(x+y) + \sqrt{x}$, $f_4(x,y) = \ln(y) + \sqrt{1-y} + \sqrt{1-x^2}$,
$f_5(x,y,z) = \dfrac{1+x^2}{xyz}$.

2. Dans chaque cas, déterminer les courbes de niveau des fonctions de deux variables données.
$f(x,y) = x+y-1$, $g(x,y) = e^{y-x^2}$, $h(x,y) = y - \cos x$, $k(x,y) = \ln(x-y^2)$.

Exercice 2

Calculer la limite si elle existe dans les cas suivants :

$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{1}{x-y}$, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{y^3}{(x-1)^2+y^2}$, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} y^2\sin\left(\frac{x}{y}\right)$, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$,
$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2}$, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,\pi)} \frac{1}{x}\sin\left(\frac{x}{y}\right)$,

Exercice 3

Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ à valeur dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x,y) = \dfrac{2xy^2}{x^2+y^2}$

Montrer que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ de trois manières différentes :

1. Par majoration. 2. En utilisant les coordonnées polaires. 3. Selon la définition.

Exercice 4

1. Étudier la continuité des fonctions f et g suivantes définies sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}, \quad (SUPP)\ g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

2. Étudier si les fonctions suivantes peuvent être prolongées par continuité au point a

$f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$, $a = (0,0)$, $g(x,y) = \dfrac{x-2}{(x-2)^2+y^2}$, $a = (2,0)$,

$(SUPP)$ $h(x,y) = \dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$, $a = (0,0)$ $(SUPP)$ $k(x,y) = \dfrac{\sin(x^2)-\sin(y^2)}{x^2+y^2}$, $a = (0,0)$

Exercice 5

Dans chaque cas, calculer toutes les dérivées partielles premières des fonctions suivantes.

1. $f(x,y) = x^2 + 3xy^2 - 4y^5$, $g(x,y) = y\cos(e^{xy+3y})$, $(SUPP)$ $h(x,y,z) = x\sin(yz) - \ln(3-e^{x+y})$
2. $(SUPP)$ Soit $F(x,y) = \sin(xy)$. Calculer toutes les dérivées partielles de F jusqu'à l'ordre 3.

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{(x^2+y^2)^n} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Trouver une condition sur n pour que f soit continue au point $(0,0)$.
2. Calculer les dérivées partielles de f aux points : $(x,y) \neq (0,0)$ et $(x,y) = (0,0)$

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x,y) = \begin{cases} xy\left(\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

1. $(SUPP)$ Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$. 2. Calculer $\nabla f(x,y)$.
3. Montrer que f admet des dérivées partielles secondes en tout point de $\mathbb{R}^2$.
4. Que peut-on déduire du calcul de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$?

Exercice 8

1. Calculer la dérivée directionnelle de $f(x,y) = 3x^2y - 4xy$ en $(1,2)$ selon $\vec{v} = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$.
2. Vérifier l'égalité : $D_v(1,2) = \nabla f(1,2).v = \dfrac{\partial f}{\partial x}(1,2).v_1 + \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,2).v_2$

Exercice 9

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$ telle que : $f(u,v) = u + v$ où $u(x,y) = e^{x+y}$ et $v(x,y) = x^2 + y^2$
Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de la fonction f.

Exercice 10

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la fonction définie par : $f(x,y) = (\cos(x) + \sin(y),\ -\sin(x) + \cos(y),\ 2\sin(x)\cos(y))$.
1. Déterminer la matrice Jacobienne $J_{(x,y)}(f)$ de f au point (x,y).
2. Soit $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par : $g(u,v,w) = u^2 + v^2 + w$.
Déterminer la matrice Jacobienne $J_{(u,v,w)}(g)$ de g au point (u,v,w).
3. Calculer de deux manières diférentes la matrice Jacobienne $J_{(x,y)}(g \circ f)$ de $g \circ f$ au point (x,y).

Exercice 11

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par: $f(x,y) = xe^{x\text{-}y}$
1. Vérifier que f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$, puis donner sa différentielle en point $(1,-1)$.
2. Déduire le DL de f à l'ordre 1 en $(1,-1)$. 3. Calculer une valeur approchée de $f(1.1,-0.9)$.

Exercice 12

On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x,y) = x^2 + y^3 - 3y$
1. Justifier que f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et préciser son gradient, en tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
2. Déterminer les points critiques de f.
3. Étudier les extrema éventuels de f, en précisant leurs natures.

Exercice 13

Soit l'équation : $x^5 + xyz + y^3 + 3xz^4 = 2 \quad (*)$
1. Montrer que $(*)$ définit au vois. de $(1,-1)$ une fonction implicite $z = g(x,y)$: $g(1,-1) = 1$.
2. Donner l'équation du plan tangent à la surface $z = g(x,y)$ en point $(1,-1)$.

Exercices supplémentaires

Exercice 1

Dans chaque cas, déterminer et représenter le domaine de définition des fonctions suivantes :

$f_6(x,y) = \ln(x+y-1)$, $f_7(x,y) = \sqrt{1-xy}$, $f_8(x,y) = \dfrac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$

Exercice 2

Calculer la limite si elle existe dans les cas suivants :

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+xy+y^2}$, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y-3}{x+y+1}$, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^{xy}-1}{e^x-1}$

Exercice 3

1. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ sauf aux points de la première bissectrice $(y=x)$, telle que : $f(x,y) = \dfrac{\sin x - \sin y}{x-y}$.

Montrer que $\lim\limits_{(x,y)\to(\alpha,\alpha)} \dfrac{\sin x - \sin y}{x-y} = \cos\alpha$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.

2. Calculer la limite suivante : $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

3. Calculer la limite suivante : $\lim\limits_{\|(x,y)\|_2\to+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\sin(2xy)$

Exercice 4

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2+y^2-1 & \text{si } x^2+y^2>1 \\ -\frac{1}{2}x^2 & \text{sinon} \end{cases}$

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5

1. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par : $f(x,y,z) = (x+y^2, xy^2z)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^3$.
2. Même question pour $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par : $g(u,v) = (u^2+v, uv, e^u)$ sur $\mathbb{R}^2$.
3. Déterminer la matrice jacobienne de $g\circ f$ au point $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ en procédant directement puis en appliquant le théorème sur la composée des différentielles.

Exercice 6

1. Vérifier, en utilisant la définition, que les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suivantes sont différentiables dans le point indiqué :

$f(x,y) = xy-3x^2$ en $(1,2)$, $g(x,y) = xy-2y^2$ en $(-2,3)$, $h(x,y) = y\sqrt{x}$ en $(4,1)$.

2. Soit la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x,y) = xy+yz+zx$

Vérifier que f est différentiable sur $\mathbb{R}^3$ et donner sa différentielle.

Exercice 7

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$

1. f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$? 2. Calculer $\nabla f(x,y)$.
3. f est-elle de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$? 4. Est ce que f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 8

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

1. Calculer les dérivées partielles premières en $(0,0)$.
2. Étudier la continuité des dérivées partielles premières en $(0,0)$. 3. f est-elle différentiable en $(0,0)$?

Exercice 9

Déterminer la différentielle de la fonction f dans les cas suivants :

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ avec $f(x,y) = x + 2y + x^2y$ 2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ avec $f(x,y) = e^x x + xy^2$
3. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ avec $f(x,y) = (e^y, x^2)$ 4. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ avec $f(x,y) = (\sin x, \cos^2 y, e^{x+y})$

Exercice 10

Soit la fonction f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

1. Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes : $F(x,y) = f(y,x)$ et $G(x) = f(x,x)$
2. Vérifier vos résultats sur l'exemple $f(x,y) = x^3 + xy^2$.

Exercice 11

Sachant que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est différentiable et que $f(2,5) = 6$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(2,5) = 1$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(2,5) = -1$

Donner une valeur approchée de $f(2{,}2, 4{,}9)$.

Exercice 12

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x,y) = x + y^2 + z^3$.
Calculer la dérivée directionnelle au point $(1,1,1)$ selon la direction des vecteurs suivants :
$\vec{v} = (2,1,3)$ et $\vec{w} = (1,-1,1)$.

Exercice 13

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^5}{(y - x^2)^2 + x^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

1. Démontrer que la fonction f est continue en $(0,0)$.
2. Démontrer que la f admet une dérivée selon tout vecteur non nul $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ au point $(0,0)$.

Exercice 14

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2(y+1)}{x^2 + (y+1)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,-1) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,-1) \end{cases}$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Étudier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}^2$, puis calculer $\nabla f(x,y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
3. Montrer que f n'est pas différentiable en $(0,-1)$. 4. f est-elle de classe C^1 en $(0,-1)$?

Exercice 15

On considère la courbe plane d'équation $xe^y + e^x \sin(2y) = 0$

1. Vérifier que cette équation définie une et une seule fonction $y = \varphi(x)$ au voisinage de $(0,0)$.
2. Calculer $\varphi(0)$ et écrire l'équation de la droite tangente au graphe de la fonction φ au point $(0, \varphi(0))$.
3. En déduire la limite de $\dfrac{y}{x}$ quand (x,y) tend vers $(0,0)$ en étant sur la courbe.

Exercice 16

On considère la courbe plane d'équation $2x^3y + 2x^2 + y^2 = 0$
1. Vérifier que cette équation définie une et une seule fonction $y = \varphi(x)$ au voisinage de $(1,1)$.
2. Calculer $\varphi(0)$ et écrire l'équation de la droite tangente au graphe de la fonction φ au point $(1,\varphi(1))$.
3. Calculer le développement de Taylor de φ à l'ordre φ centré en 1.

Exercice 17

Trouver le développement limité au voisinage de $(0,0)$ à l'ordre 2 de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :
$f(x,y) = \dfrac{2+x+y}{1+x-y}$.

Exercice 16

Donner le développement limité de d'ordre 2 en $(0,0)$ des fonctions suivantes :
$f(x,y) = \dfrac{\cos x}{\cos y}$, $F(x,y) = \dfrac{e^x}{2+y}$, $g(x,y) = e^{\cos(x+y)}$ et $h(x,y) = e^y \cos x$.

Exercice 18

Soit la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x,y) = x^2 + 2xy + y - y^3$.
1. Déterminer les points critiques de f. 2. Donner leur nature (extremum local, point selle ...).
3. Montrer que le minimum local obtenu n'est pas un minimum global pour f.

Exercice 19

Soit la fonction $f : (x,y) \mapsto x\ln^2 x + y^2$.
1. Préciser le domaine de définition de f.
2.a. Trouver les points critiques de f. b. Déterminer leur nature.
3.a. Montrer que le minimum local obtenu est en fait un minimum global.
b. f admet-elle un maximum global?

Exercice 20

Déterminer les points critiques et leurs natures dans les cas suivants :
1. $f(x,y) = 4x^2 + 2xy + y^2$. 2. $f(x,y) = -x^2 + x - xy + y - y^2$. 3. $f(x,y) = x^2 + 2x + y^2 - 3y + 2z^2$.

Exercice 21

Soit la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x,y) = x^2 - \cos y$.
1. Trouver les points critiques de f. 2. Établir leur nature (extremum local, point selle...)
3. f admet-elle des extremums globaux?
Indication : Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on a: $\sin(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 22

On défnit une fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par : $f(x,y) = x^2 + \dfrac{y^3}{3} + xy$.
1. Donner le développement limité de f en $(0,0)$ à l'ordre 2.
2. Trouver les points critiques de f. 3. Déterminer la nature des points critiques.
4. La fonction f a-t-elle un minimum ou un maximum global?

Exercice 23

Etudier les extrêma de la fonction: $f(x;y) = x^4 + y^4 - (x-y)^2$.