Université Abou Bekr Belkaid - Tlemcen
Faculté des sciences
Département de mathématiques

Année universitaire: 2025 - 2026
Module: Analyse 4
L2 Mathématiques

T.D N° 1: Intégrales généralisées

Exercice 1

1. En utilisant les primitives usuelles, déterminer la nature des intégrales impropres suivantes :

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x \, dx, \quad B = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} \, dx, \; C = \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2} dx$$

2. Etudier la nature des intégrales impropres suivantes :

$$I_1 = \int_0^1 \frac{x^2+1}{\sqrt{x}\,(1-x)} dx, \; I_2 = \int_1^{+\infty} x^{2026} e^{-x} dx, \; I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} \, dx, \; I_4 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(1+\sin x) \, dx,$$

$$I_5 = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos}{x^2} dx, \; I_6 = \int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx, \; I_7 = \int_1^{+\infty} \frac{1-e^{-x}}{x\sqrt{x}} \, dx, \; I_8 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}\,(x^2+1)} dx$$

Exercice 2

Soit $f: I = [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction localement intégrable sur I ayant une limite $L > 0$ en $+\infty$.

1. Montrer que $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ n'est pas convergente.

2. Les intégrales suivantes sont elles convergentes : $\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{e^{-t^2}} dt$ et $\int_1^{+\infty} x \sin(\frac{1}{x}) dx$

Exercice 3

1. Soit f une fonction continue et positive sur $[0, +\infty[$ telle que $\lim\limits_{t \to +\infty} t^2 f(t) = 0.$ Alors

$a.$ $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge $\quad b.$ $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ diverge $\quad c.$ On ne peux rien dire sur la nature de $\int_0^{+\infty} f(t) dt$

2. $(Supp)$ Même question si $\lim\limits_{t \to +\infty} t^2 f(t) = +\infty, \quad \lim\limits_{t \to +\infty} t f(t) = +\infty, \quad \lim\limits_{t \to +\infty} t f(t) = 0, \quad \lim\limits_{t \to +\infty} t f(t) = +\infty$

Exercice 4 $(SUPP)$

Soit $f: [0, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$ une fonction de classe C^1.

On suppose que les intégrales impropres $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ et $\int_0^{+\infty} f'(t) dt$ convergent toutes les deux.

Montrer alors que $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0.$

Exercice 5

On définit les fonctions Gamma et Bêta par:

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{z-1} dx, \; B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx$$

1) Calculer $\Gamma(1)$.
2) Exprimer $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ à l'aide de la fonction Gamma. (indication: poser $t = x^2$)

3) Exprimer $I(a,b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{2a-1}(\cos x)^{2b-1}dx$ à l'aide de la fonction béta.
(Indication: utiliser le changement de variables $s = \sin^2 x$)
4) Calculer $I(a,b)$ pour $a = b = \frac{1}{2}$
5) En utilisant la relation $B(a,b) = \dfrac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$ déterminer la valeur de $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$
6) En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$

Exercice 6

Utilisant les fonctions Gamma et Béta, calculer les intègrales impropres suivantes:

$$\int_0^1 \left(\log \frac{1}{x}\right)^3 dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin x}}dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{\sqrt{t}}dt\ (Supp) \quad \int_0^{+\infty} \sqrt{x}\, e^{-x^3}dx\ (Supp)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin x}\, dx\ (Supp) \quad \int_1^2 (x-1)^3\ (2-x)^2 dx\ \ (Supp)$$

Exercice 7

1. Etudier l'existence de $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\sin xt}{t}\ dt$
2. Etudier la dérivabilité de F et calculer $F'(x)$
3. En déduire $F(x)$

Exercice 8 (SUPP)

Etudier la convergence uniforme de $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos((1+x^2)t)}{1+x^2+t^2}\ dt$

Exercice 9 (SUPP)

Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\ dt$

1. Déterminer le domaine de définition de F.
2. Etudier la convergence uniforme.