Université de Tlemcen *Département de Mathématiques*
2e Année Licence Math *2025/2026*
Introduction à la Topologie *TD N° 5* *Semestre 3*

Exercice 1:
Soit (E, d) un espace métrique.
1. On pose pour tout $(x, y) \in E \times E$

$$\delta(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

Montrer δ est une distance sur E.
2. Soit $g: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une application croissante ne s'annulant que pour 0 et que pour tous réels positifs r et s, $g(r + s) \leq g(r) + g(s)$.
a. Montrer que l'application f de $\mathbb{R}^+$ dans lui-même définie par

$$f(t) = \frac{t}{1 + t}$$

vérifie les mêmes hypothèses que g.
b. Montrer que l'application $g \circ d$ définit une distance sur E.
c. Montrer que si g est continue en 0, alors les distances d et d' sont uniformément équivalentes, où $d' = g \circ d$.

Exercice 2:
Soit (E, d) un espace métrique et soit $x \in E$ et $r > 0$.
Rappelons que la boule ouverte $B(x, r)$ est un ouvert de E, puisque pour tout $y \in B(x, r)$ on a $B(y, \rho) \subset B(x, r)$ où $\rho = r - d(x, y)$.
1. Montrer que la boule fermée de centre x et rayon r, notée $B'(x, r)$ est un fermé de E.
2. Montrer que $B(x, r) \subset \overset{\circ}{\widehat{B'(x, r)}}$ et $\overline{B(x, r)} \subset B'(x, r)$.
Donner deux exemples où il n'y a pas égalité.

Exercice 3 :
1. Montrer que tout espace métrique fini est complet.
2. Montrer que tout intervalle fermé et borné de $\mathbb{R}$ est complet.

Exercice 4 :
Soit (E, d) un espace métrique et A une partie non vide de E.
1. Montrer si A est complète alors A est fermée.
2. En déduire que si (E, d) est complet, alors: A fermée $\Longleftrightarrow$ A complète.

Exercice 5 :
Soit $E = \mathcal{C}([a, b];\ \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions numériques continues sur $[a, b]$.
On munit E de la distance d définie par: $d(f, g) = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x) - g(x)|$ où $f, g \in E$.
Montrer que E est complet.

Exercice 6 :
Soit $F = \{(x_n)_n \subset \mathbb{R};\ \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N,\ x_n = 0\}$ et $G = \{(x_n)_n \subset \mathbb{R};\ \lim_{n \to +\infty} x_n = 0\}$.
On munit F et G de la distance $d\big((x_n), (y_n)\big) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n - y_n|$.
1. Montrer que F n'est pas complet et que G est complet.
2. Quelle est la relation entre F et G.

ahmed.bensedik@univ-tlemcen.dz