

Exercice 1:

Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique et A et B deux parties de E .

Soit M un sous-ensemble de E tel que $M \subset A \cap B$.

Montrer que si M est ouvert dans A et dans B alors M est ouvert dans $A \cup B$.

Même conclusion si M est fermé dans les deux parties.

Exercice 2:

Soit E et F deux espaces topologiques, $A \subset E$ et $B \subset F$. Montrer que

$$Fr(A \times B) = (Fr(A) \times \bar{B}) \cup (\bar{A} \times Fr(B))$$

Exercice 3:

Soit $(E_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille de n espaces topologiques et soit $E = \prod_{1 \leq i \leq n} E_i$ leur espace topologique produit. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, soit $A_i \subset E_i$.

On pose $A = \prod_{1 \leq i \leq n} A_i$.

1. Montrer que : $\bar{A} = \prod_{1 \leq i \leq n} \bar{A}_i$ et $\dot{A} = \prod_{1 \leq i \leq n} \dot{A}_i$.

2. Montrer alors qu'un produit $\prod_{1 \leq i \leq n} A_i$ d'ensembles non vides est fermé dans E si et seulement si pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, A_i est fermé dans E_i .

Exercice 4:

Soit E un espace topologique et $(x_n)_n$ une suite de points de E .

1. On suppose que la suite $(x_n)_n$ est convergente. Montrer que si E est séparé, alors la limite de $(x_n)_n$ est unique.

2. Montrer que $(x_n)_n$ converge vers $x \in E$ si et seulement si les sous-suites $(x_{2n})_n$ et $(x_{2n+1})_n$ convergent vers x .

Exercice 5:

Soit E un ensemble infini. On pose $\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{A \subseteq E, \text{card}(E \setminus A) \leq \text{card } \mathbb{N}\}$, où $E \setminus A$ désigne le complémentaire de A dans E .

1. Montrer que $(E, \mathcal{T})$ est un espace topologique.

2. Montrer que les suites convergentes dans E sont les suites stationnaires.

3. Soit A un sous-espace de E et, $(x_n)_n$ une suite de points de A . Montrer que si $(x_n)_n$ converge vers $x \in E$ alors $x \in \bar{A}$.