

Exercice 1 :

Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique et A et B deux parties de E .

On désigne par $\overset{\circ}{A}$ l'intérieur de A et par $\bar{A}$ l'adhérence de A .

1. Montrer que $\overset{\circ}{A} \in \mathcal{T}$ et que $\bar{A}$ est un fermé.
2. Montrer que $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subseteq \overline{\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}}$. Vérifier par un exemple que l'on peut avoir $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \neq \overline{\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}}$.
3. Montrer que $\overline{A \cap B} \subseteq \bar{A} \cap \bar{B}$. Vérifier par un exemple que l'on peut avoir $\overline{A \cap B} \neq \bar{A} \cap \bar{B}$.

Exercice 2 :

Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique et A une partie de E . On désigne par $Fr(A)$ la frontière de A . Montrer les assertions suivantes :

1. $Fr(A)$ est un fermé.
2. A est un fermé si et seulement si $Fr(A) \subseteq A$.
3. $A \in \mathcal{T}$ si et seulement si $Fr(A) \cap A = \emptyset$.
4. A est ouvert et fermé si et seulement si $Fr(A) = \emptyset$.
5. $Fr(A \cup B) \subseteq Fr(A) \cup Fr(B)$.

Exercice 3 :

Soit A un ensemble de $\mathbb{R}$ tel que $\bar{A}$ est d'intérieur vide, $Int(\bar{A}) = \emptyset$.

On dit que A est un ensemble rare.

1. Donner un exemple d'ensemble rare de $\mathbb{R}$.
2. Montrer que tout intervalle I de $\mathbb{R}$ contient un intervalle U tel que $U \cap A = \emptyset$.

Exercice 4 :

Sur $\mathbb{N}$ on définit l'ensemble des parties suivant :

$$\mathcal{T}_1 = \{\mathbb{N}, \emptyset\} \cup \{\{0, 1, \dots, n\} : n \in \mathbb{N}\}$$

1. Montrer que $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_1)$ est un espace topologique.
2. Déterminer le plus petit ouvert contenant l'entier 1 et $Fr(\{2, 3\})$.
3. Déterminer les fermés de $\mathbb{N}$ pour la topologie $\mathcal{T}_1$.
4. Trouver la topologie induite par $\mathcal{T}_1$ sur l'ensemble des entiers impairs.