Université Abou Bekr Belkaid - Tlemcen
Faculté des sciences
Département de mathématiques

Année universitaire: 2025 - 2026
Module: Analyse 3
L2 Mathématiques

T.D N°3 : Séries entières

Exercice 1

(1) Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière.

On suppose qu'elle diverge pour $z = 3+4i$ et qu'elle converge pour $z = 5i$. Quel est son rayon de convergence ?

(2) Soit $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum_{n\geq 0}(a_n)^k x^n$ et $\sum_{n\geq 0} a_n x^{kn}$ où $k \in \mathbb{N}^*$.

(3) Soit (a_n) et (b_n) deux suites.

(i) Si la suite (a_n) est équivalente à la suite (b_n), montrer alors que les séries $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ ont le même rayon de convergence.

(ii) Si à partir d'un certain rang $n_0 \geq 0$ on a $|a_n| \leq |b_n|$, démontrer que le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est plus grand que celui de la série $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$.

Exercice 2

(1) Donner un exemple de série entière de rayon de convergence π.

(2) Est-il possible de trouver des suites (a_n) et (b_n) telles que $a_n = o(b_n)$ et pourtant $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ ont le même rayon de convergence?

(3) Quel est le lien entre les rayons de convergence des séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum (-1)^n a_n x^n$.

Exercice 3

(I) Déterminer le rayon de convergence R des séries entières suivantes:

(1) $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{3n}}{2n^n} x^n$ (2) $\sum_{n\geq 0} (-1)^n (n+1)! x^n$ (3) $\sum_{n\geq 0} (2+i)^n z^n$ (4) $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n} x^n$ (5) $\sum_{n\geq 0} \frac{2^n}{1+\left(\frac{1}{5}\right)^n} x^n$ (6) $\sum_{n\geq 1} \frac{e^n}{n^2} x^{2n}$

(7) $\sum_{n\geq 1} \sin(\frac{1}{n}) x^n$.

(II) Déterminer le rayon de convergence R et calculer les sommes des séries entières suivantes:

(1) $\sum_{n\geq 1} \frac{x^{2n+1}}{(2n)!}$ (2) $\sum_{n\geq 2} \frac{x^n}{n^2-1}$ (3) $\sum_{n\geq 0} \sinh(n)\, x^n$ (4) $\sum_{n\geq 1} a_n x^n$ où $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n(n+3)} & \text{si } n \in 3\mathbb{N}^* \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

(III) Trouver le rayon de convergence R, calculer la somme pour tout nombre reel x tel que $|x| < R$ et étudier ce qui se passe si $|x| = R$ pour les séries entières suivantes :

(1) $\sum_{n\geq 1} \frac{x^{3n}}{2^n}$ (2) $\sum_{n\geq 1} \frac{x^{2n}}{2n}$ (3) $\sum_{n\geq 0} n^2 x^n$ (4) $\sum_{n\geq 1} \frac{n^2+1}{n!} x^n$ (5) $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^n$ (6) $\sum_{n\geq 0} ((-1)^n + n) x^n$

Exercice 4

(1) Etudier la nature des séries suivantes : $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n\ 2^n}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$

(2) Soit la série entière: $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n\ 2^n} x^n$

- Déterminer le rayon de convergence R et le domaine de convergence de cette série.

(3) Posons pour $|x| < R, f(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n\ 2^n} x^n.$

- Calculer $x f'(x)$ et en déduire $f(x)$

(4) Calculer: $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n\ 2^n}, \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n\ 2^n}, \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n\ 2^{2n}}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n\ 2^{\frac{n}{2}}}$

Exercice 5

Développer en séries entières au voisinage de 0 sur un intervalle que l'on déterminera, les fonctions suivantes :

$(1)\ f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$ $(2)\ g(x) = \ln(x^2 + x + 1)$ $(1)\ h(x) = \frac{x^2}{2x+1}$ $(4)\ F(x) = \int_0^x \sin(t^2)dt$

$(5)\ G(x) = \frac{e^x}{x-1},$ $(6)\ H(x) = \sqrt{2-x}$

Exercice 6

Le but de cet exercice est de chercher la somme $S(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$

(1) Vérifier que S est définie sur $\mathbb{R}$ et que $S(0) = 1$ et $S'(0) = 0$

(2) Soit l'équation différentielle (E) : $y'' + y' + y = e^x$

(i) Chercher les solutions de (E).

(ii) Vérifier que S est solution de (E).

(iii) En déduire la somme S sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7

Chercher la série entière solution de l'équation différentielle (E) : $y'' + xy' + y = 0$ verifiant les conditions $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

Exercice 8

Soit la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n n!} x^{2n}.$

(1) Montrer que cette série est absolument convergente sur $\mathbb{R}$, puis en déduire son rayon de convergence R.

(2) Calculer $S(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n n!} x^{2n}$ sur $\mathbb{R}$.

(3) On considère l'équation différentielle (E) : $y'' - xy' - y = 0.$

– Déterminer parmi les solutions de (E), celles qui sont développables en séries entières en 0 et paires.

Exercices supplémentaires

Exercice 1

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R.

Déterminer le rayon de convergence de la série entière suivante : $\sum_{n\geq 0} a_n x^{2n}$

Exercice 2

Soit f la fonction définie par : $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n$

(1) Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière.

(2) Etudier la convergence en $-R$ et en R .

Exercice 3

(1) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière: $\sum_{n\geq 1} n\, x^n$

(2) Calculer sa somme $S(x)$.

(3) En déduire la somme de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{n}{2^n}$

Exercice 4

Soit la série $\sum_{n\geq 1} \frac{x^{2n}}{n\, 2^{n+1}}$

(1) Déterminer le rayon de convergence R.

(2) Etudier la série pour $|x| = R$ et en déduire le domaine de convergence.

(3) Soit $f(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{x^{2n}}{n\, 2^{n+1}}$ pour $|x| < R$;

Déterminer $f'(x)$ et en déduire $f(x)$.

(4) Calculer les sommes des séries: $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n\, 2^{n+1}}$, $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n\, 2^{2n+1}}$

Exercice 5

(1) Donner le rayon, puis le domaine de convergence de la série entière suivante :
$\sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$. Notons $f(x)$ sa somme.

(2) Calculer $f'(x)$, puis donner sa somme. En déduire la somme de la série $f(x)$.

(3) En déduire la valeur de la série :$\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$

Exercice 6

Développer en série entière les fonctions suivantes

$(1)\ f(x) = \frac{1}{-x^2 - x + 2}$ $\quad (2)\ g(x) = \frac{3x}{1 - x^2}$ $\quad (1)\ h(x) = \ln(-x^2 + 2x + 3)$

$(4)\ k(x) = \frac{1}{(1 - x)(2 + x)}$

Exercice 7

Soit f définie sur $]-1,1[$ par $f(x) = \dfrac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$

(1) Justifier que f est développable en série entière sur $]-1,1[$.

(2) Montrer que f est solution de l'équation différentielle $(1-x^2)y' - xy = 1$.

(3) Déterminer le développement en série entière de f sur$]-1,1[$.

Exercice 8

On considère les séries entières suivantes :

$(1) \displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2-4}x^n \qquad (2) \sum_{n\geq 1} \frac{n}{(2n)!}x^{2n} \qquad (3) \sum_{n\geq 1} \frac{3(-1)^n}{4^n}x^{2n+1}$

(i) Déterminer le rayon de convergence de ces séries.

(ii) Calculer les sommes des séries (1) et (2).

(iii) Soit f la somme de (3). Calculer $f(0)$ et $f'(0)$.

(iv) En déduire la nature de la série (1) au bord de de l'intervalle de convergence.

Exercice 9

On considère l'équation différentielle (E) : $xy'' + y' + xy = 0$

(1) Déterminer l'unique solution g de (E) développable en série entière au voisinage de 0 qui vérifie : $g(0) = 1$.