Université Abou Bekr Belkaid - Tlemcen
Faculté des sciences
Département de mathématiques

Année universitaire: 2025 - 2026
Module: Analyse 3
L2 Mathématiques

T.D N° 0 Suites et sommes

Exercice 1

1. Calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{k=3}^{12}(2k+3), \sum_{k=2}^{11}\left(\sqrt[3]{2}\right)^{k-1}, \sum_{k=4}^{31}\ln\left(\frac{k}{k+1}\right)$$

2. Donner en fonction de n les sommes S_n puis calculer leurs limites

$$S_n = \sum_{k=2}^{n}(5k-1), S_n = \sum_{k=1}^{n}5.3^k, S_n = \sum_{k=2}^{n+1}(1+2^k), S_n = \sum_{k=n}^{n+1}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{3^k}\right)$$

Exercice 2

1. On donne les termes généraux des séries numériques $\sum u_n$ et $\sum v_n$ suivantes:

$$u_n = \frac{4n-3}{2n+1},\ v_n = \frac{2^n}{n!}$$

Notons par (U_n) et (V_n) les sommes partielles des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ respectivement
Ecrire en extension les sommes partielles $U_3,\ U_5,\ V_4, V_6$

2. Inversement, pour les sommes écrites en extension suivantes, trouver l'expression du terme général de la série correspondante

$$\frac{5}{1\times 2}+\frac{8}{2\times 3}+\frac{11}{3\times 4}+\frac{14}{4\times 5}+\dots \qquad \frac{1}{3}-\frac{4}{9}+\frac{9}{27}-\frac{16}{81}+\dots \qquad 2-\frac{3}{4}+\frac{4}{9}-\frac{5}{16}+\dots$$

$$\frac{2}{5}+\frac{4}{8}+\frac{6}{11}+\frac{8}{14}+\dots \qquad 1+\frac{1\times 3}{1\times 4}+\frac{1\times 3\times 5}{1\times 4\times 7}+\frac{1\times 3\times 5\times 7}{1\times 4\times 7\times 10}+\dots$$

Exercice 3

1. Montrer à partir de la définition que les séries numériques suivantes sont convergentes et calculer leurs sommes

$$\sum \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right), \sum \frac{1}{(n^3-n)}, , \sum(-1^n)\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right), \sum(3^{-n+2}+2^{-n+3}), \sum \frac{(-1)^n+\sqrt{n+1}-3\sqrt{n}}{3^{n+1}}$$

2. Calculer les sommes suivantes:

$$(a)\sum_{n\geq 2}\frac{2^n}{3^{n-2}},\quad (b)\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{e^{-n}(\pi\alpha)^n},\ \alpha>1,\quad (c)\sum_{n\geq 0}\frac{n+1}{n!},\quad (d)\sum_{n\geq 0}\frac{n^2-1}{n!},$$

$$(e)\sum_{n\geq 0}\frac{n^3}{n!},\quad (f)\sum_{n\geq 1}n.a^{n-1}, 0<a<1 \quad (g)\sum_{n\geq 0}\arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right)$$

Indication: $\left(\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}=e\right)$

(d) $n^2 = n(n-1)+a.n$ $\left(a\right.$ à déterminer$\left.\right)$,

(e) $n^3 = n(n-1)(n-2)+b.n(n-1)+c.n$ $\left(b,\ c\right.$ à déterminer$\left.\right)$

(f) calculer $(1-a).S_n$ $\left(S_n\right.$ somme partielle$\left.\right)$

(g) utiliser $\arctan x-\arctan y = \arctan\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)$

Exercice 4

Montrer que les séries suivantes sont grossièrement divergentes :

$$\sum \cos\frac{1}{n^2}, \sum \frac{(-1)^n n}{n+1}, \sum\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \sum\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^2}$$