Université Abou Bekr Belkaid - Tlemcen
Faculté des sciences
Département de mathématiques

Année universitaire: 2025 - 2026
Module: Analyse 3
L2 Mathématiques

T.D N°4 : Séries de Fourier

Exercice 1

1. Donner la forme de la série de Fourier $S(f,\ x)$ associée à une fonction f $T-$périodique, ainsi que les formules permettant de calculer ses coefficients.
2. **Application** : Déterminer la série de Fourier associée à la fonction f de période 2 définie par:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{si } 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π –périodique impaire définie sur $[0,\pi]$ par : $f(x) = x(\pi - x)$.

1. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et qu'elle est de classe C^2 par morceaux.
2. Former le développement en série de Fourier de f. En déduire la somme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}.$$

3. Calculer les sommes

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^6} \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6}.$$

Exercice 3

Soit $\alpha \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π –périodique telle que : $\forall x \in [-\pi,\pi]$, $f(x) = \cos \alpha x$.

1. Développer la fonction f en série de Fourier.
2. En déduire que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$:

$$\frac{\pi}{\sin \pi\alpha} = \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2\alpha}{\alpha^2 - n^2} \text{ et que } \pi \cot(\pi\alpha) = \frac{1}{\alpha} + \sum_{n\geq 1} \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2}$$

$$\cos a \ \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$$
$$\sin(a+b) = \sin a \ \cos b + \cos a \ \sin b$$
$$\sin(a-b) = \sin a \ \cos b - \cos a \ \sin b$$
$$\cos n\pi = (-1)^n$$

Exercice 4

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 4π –périodique et paire telle que:

$$\forall x \in [0, 2\pi],\ f(x) = x.$$

1. Donner la série de Fourier $S(f,\ x)$ associée à f ainsi que sa somme.

2. *a*. Retrouver la somme de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

   b. En déduire les sommes suivantes :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

3. Ecrire l'identité de Parseval et en déduire que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96} \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Exercice 5

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π –périodique impaire telle que:

$$\begin{cases} \forall t \in]0,\pi[, f(t) = 1 \\ \forall n \in \mathbb{Z}, f(n\pi) = 0. \end{cases}$$

1. Tracer le graphe de f et montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}.$$

2. Montrer que la série de Fourier $S(f, x)$ associée à f est

$$S(f, x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$$

3. Montrer que $S(f, x)$ converge et que sa somme est f.
4. En déduire que la somme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

5. En appliquant la relation de Parseval, montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

6. En déduire que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \text{ et que } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$$

Exercice 6

Considérons la fonction f de période $T = 2\pi$ définie sur $[-\pi, \pi[$ par :

$$f(x) = \pi - x^2$$

1. Représenter f sur $[-3\pi, 3\pi[$
2. Déterminer la série de Fourier associée à f.
3. En déduire

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

Exercice 7

Soit f la fonction paire de période π définie par :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], f(x) = \frac{\pi}{2} - x.$$

1. Tracer le graphe de f sur $[-\pi, \pi]$.
2. Calculer les coefficients de Fourier a_n et b_n de f.
3. Développer f en série de Fourier.
4. Montrer que la série de Fourier de f converge uniformément vers f.
5. En déduire la somme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$