Université Abou Bekr Belkaid - Tlemcen
Faculté des sciences
Département de mathématiques

Année universitaire: 2025 - 2026
Module: Analyse 3
L2 Mathématiques

T.D N°2 : Suites et séries de fonctions

Exercice 1

Etudier la convergence simple des suites des fonctions suivantes :

$$f_n(x) = \left(\frac{x^2+n}{2x^2+n}\right)^n,\ g_n(x) = \frac{1}{1+x^2+x^4+\ldots+x^{2n}}, h_n(x) = \frac{nx^n}{x^{2n}+x^n+1}, k_n(x) = \frac{x^{4n}}{1+x^{2n}}$$

Exercice 2

Soit $f_n : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \dfrac{nx}{1+2nx}, n \in \mathbb{N}^*$.

(1) Calculer $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$. (2) f est-elle continue sur $\mathbb{R}^+$?

(3) A-t-on la convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$?

(4) Posons $I = [a,+\infty[$ où $a > 0$.

(i) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{x\in I} |f_n(x) - f(x)|$.

(ii) f_n converge -t-elle uniformément sur I ?

Exercice 3

Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{ne^x}{n+x}dx.$$

Exercice 4

Soit $f_n : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \dfrac{\ln(x+n)}{n^2}, n \geq 1$.

(1) Etudier la convergence simple de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq1} f_n(x)$. On note $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$

(2) Montrer que S est de classe C^2 sur $[0,+\infty[$ et exprimer pour tout $x \in [0,+\infty[$ $S'(x)$ et $S''(x)$ sous formes de sommes de séries.

(3) En déduire que S est strictement croissante sur $[0,+\infty[$ et que S est concave sur $[0,+\infty[$.

Exercice 5

On considère la série de fonction $\sum\limits_{n\geq1} f_n(x)$ où $f_n(x) = \dfrac{\cos nx}{n^3}$

(1) Déterminer le domaine de convergence de cette série.

(2) Montrer que $f(x) = \sum\limits_{n\geq1} f_n(x)$ est une fonction continue sur son domaine de convergence.

(3) Montrer que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \sum_{n\geq0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^4}$.

(4) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -\displaystyle\sum_{n\geq1} \frac{\sin nx}{n^2}$

Exercice 6

Soit la série de fonctions de terme général : $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{n^x}$, $x \in \mathbb{R}^{+*}$.

(1) Déterminer le domaine de convergence absolue de cette série.

(2) Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} u_n(x)$ est convergente sur $\mathbb{R}^{+*}$.

(3) Déterminer $\sup_{x\in I} |u_n(x)|$ où $I = [a,+\infty[$ et $a > 1$.

(4) $\sum_{n\geq 1} u_n(x)$ est-elle uniformément convergente sur I.

Exercice 7

(1) Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{x}{n^2+x^2}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ et que sa somme et continue, mais que la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}^+$.

(2) Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{x}{n^2+x^2}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$ mais que la convergence n'est pas normale sur $\mathbb{R}^+$.

Exercices supplémentaires

Exercice 1

Soit $f_n(x) = x^n(1-x)$, $x \in [0,1], n \geq 1$.

(1) Montrer que (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$.

(2) Calculer sans intégration $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 x^n(1-x)dx$.

Exercice 2

Etudier la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$, de la suite de fonctions définie par :

$$f_n(x) = \frac{1-nx^2}{nx+2},\ n \in \mathbb{N}.$$

Exercice 3

On considère la suite de fonctions $f_n(x) = xe^{-nx^2}$ où $x \in \mathbb{R}$.

(1) Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

(2) Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, comparer les quantités $\frac{d}{dx}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right)$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{d}{dx}(f_n(x))$.

(3) Que peu-t-on dire sur laconverge uniforme de la suite de fonctions dérivées $\left(f'_n(x)\right)$?

Exercice 4

Sur $[0,1]$, on définit les deux suites de fonctions (f_n) et (g_n) par les expressions :

$f_n(x) = (x(1-x))^n + x$ et $g_n(x) = (1-x)^n + x$

(1) Etudier la convergence simple des suites des fonctions (f_n) et (g_n).

(2) Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$.

(3) Montrer que $\forall\ a \in\ ]0,1[$, la suite de fonctions (g_n) converge uniformément sur $[a,1]$.

(4) La suite de fonctions (g_n) converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?

Exercice 5

Trouver le domaine de convergence simple des séries de fonctions suivantes :

$$\sum_{n\geq 1}(\ln(x))^n, \sum_{n\geq 1} \frac{1}{sh(nx)}, \sum_{n\geq 1} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}, \sum_{n\geq 1} \frac{x^{4n}}{1+x^{2n}}.$$

Exercice 6

Soit $f_n(x) = \dfrac{x}{(1+x)^n}$, $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$.

(1) Etudier la convergence simple de la la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} f_n(x)$.

(2) Soit $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$. Calculer $S(x)$.

(3) Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 0} f_n(x)$ ne converge pas uniformément sur $[0,+\infty[$.

Exercice 7

Considèrons la suite de fonctions $f_n(x) = \dfrac{x}{n(n+x)}$, $x \in \mathbb{R}^+, n \in \mathbb{N}^*$.

(1) Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} f_n(x)$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$.

(2) Montre que $\forall a > 0,$ la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} f_n(x)$ converge normalement sur $[0,a]$.

(3) A-t-on la convergence normale sur $\mathbb{R}^+$?

(4) Etudier la continuité de $f = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 8

On considère la suite de fonctions $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n^3}$, $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$.

(1) Etudier la convergence simple et la convergence normale de la série $\sum\limits_{n\geq 1} f_n(x)$ sur $\mathbb{R}$.

(2) En déduire que $f = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ est continue sur $\mathbb{R}$.

(3) Etudier la convergence normale de la série $\sum\limits_{n\geq 1} f'_n(x)$ sur $\mathbb{R}$.

(4) En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner f' sous forme d'une série.

Exercice 9

Soit la suite de fonctions $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n(x) = (-1)^n \ln\left(1 + \dfrac{x}{n(1+x)}\right)$ pour $x \geq 0$ et $n \geq 1$.

(1) Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n(x)$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$.

(2) Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n(x)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

(3) La convergence est-elle normale sur $\mathbb{R}^+$?