Université Abou Bekr Belkaid - Tlemcen
Faculté des sciences
Département de mathématiques

Année universitaire: 2025 - 2026
Module: Analyse 3
L2 Mathématiques

T.D N°1 : Séries numériques

Exercice 1

Déterminer la nature des séries suivantes en utilisant les sommes partielles :

(1) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$, (2) $\sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)$, (3) $\sum_{n\geq 1} n.n!$, (4)$(Supp)$ $\sum \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$,
(5) $(Supp)$ $\sum_{n\geq 0} \arctan\left(\frac{1}{n^2+3n+3}\right)$, (6) $\sum_{n\geq 1} \arctan\left(\frac{1}{2n^2}\right)$

Exercice 2

Montrer que si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries à termes positifs convergentes, alors les séries $\sum \max(u_n, v_n)$, $\sum\left(\sqrt{u_n v_n}\right)$ et $\sum \frac{u_n}{n}$ sont aussi convergentes.

Exercice 3

Soit (u_n) une suite à termes positifs. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$v_n = \frac{u_n}{1+u_n} \text{ et } w_n = \frac{u_n}{1+u_n^2}$$

1. Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.
2. Montrer que si la série $\sum u_n$ converge alors la série $\sum w_n$ converge.
3. Montrer que si la série $\sum u_n$ diverge et si (u_n) est majorée alors la série $\sum w_n$ diverge.
4. Donner un exemple où la série $\sum u_n$ diverge et la série $\sum w_n$ converge.

Exercice 4

(1) Donner la nature des séries numériques suivantes.

$\sum \frac{1}{a^{\ln n}}$ $\left(a > 0, \text{vérifier que } a^{\ln n} = n^{\ln a}\right)$, $\sum \frac{1}{(\ln n)^n}$ pour $n \geq e^2$,
$\sum \frac{a^{\sqrt{n}}}{n!}$, $\sum \frac{a^{(-1)^n}}{n}$, $\sum_{n\geq 1} \sin\left(1+\frac{\cos n\pi}{n^2}\right)$, $\sum_{n\geq 0} \frac{n!}{n^{2+n}}$

Exercice 5 $(Supp)$

Etudier les natures des series de termes generaux suivants:

$a_n = \frac{1}{n3^n}, n \geq 1,$ $b_n = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right)^n, n \geq 1, c_n = \int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{\sin x}{x^2+1}dx, n \in \mathbb{N}^*,$
$d_n = \left(1-\frac{1}{2n}\right)^n t^n, n \geq 1, t \in \mathbb{R}.$

Exercice 6

(1) $(Supp)$Etudier la convergence des séries suivantes:

$\sum_{n\geq 1} \frac{n}{n^3+1}$, $\sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}}$, $\sum_{n\geq 1} n\sin\left(\frac{1}{n}\right)$, $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}$, $\sum_{n\geq 2} \frac{n}{\sqrt{n^3-1}}$, $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n+\sqrt{n}}$
$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}$ (rermarquer que: $n! \geq 2^{n-1} \quad \forall n \geq 2$), $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln(n^n)}{n!}$, $\sum_{n\geq 1} \ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$

(2) Critères de d'Alembert ou de Cauchy

$\sum_{n\geq 1} \frac{(n!)^\alpha}{n^n}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$, $\sum_{n\geq 1} \frac{n^{10}}{4^n}$, $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^n$, $\sum_{n\geq 0} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$, $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$, $\sum_{n\geq 1} (\sqrt[n]{n}-1)^n$

Exercice 7

Séries à termes quelconques

(1) ($Supp$)Déterminer la nature des séries $\sum U_n$ suivantes:

$U_n = \dfrac{\sin(n^2)}{n^2}$, $U_n = \dfrac{(-1^n)\ln n}{n}$, $U_n = \dfrac{\cos(n^2\pi)}{n\ln n}$, $U_n = \dfrac{(-1)^n n}{n+1}$, $U_n = \dfrac{(-1)^n}{n+e^n}$

(2) Etudier la convergence et la convergence absolue des séries suivantes:

$\sum\limits_{n\geq 0}(-1^n)\dfrac{1}{n+1}$, $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $\sum\limits_{n\geq 0}\dfrac{\sin(n!)}{n^n}$

Exercice 8

Soient $\alpha \in \mathbb{R}^{*+}$ et (U_n) la suite définie par: $U_n = \dfrac{(-1)^n}{\alpha n+1}$

(1) Montrer que la suite (V_n) définie par $V_n = |U_n|$ est décoissante.

(2) Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 0} U_n$ est semi-convergente.

(3) Soit $0 < t < 1$. Calculer $\int\limits_0^1 t^{\alpha n}dt$ et $\sum\limits_{n\geq 0}(-1)^n t^{\alpha n}$

(4) Montrer que: $\sum\limits_{n\geq 0} U_n = \int\limits_0^1 \dfrac{dt}{1+t^{\alpha}}$

(5) En déduire que: $\sum\limits_{n\geq 0}\dfrac{(-1)^n}{n+1} = \ln 2$ et $\sum\limits_{n\geq 0}\dfrac{(-1)^n}{2n+1} = \dfrac{\pi}{4}$

(6) Donner une valeur approchée de $\ln 2$ à la précision 10^{-3}

(7) Donner une valeur approchée de π à la précision 10^{-4}

Exercice 9

Étude et comportement asymptotique de la série harmonique.

On pose $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k} = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \ldots + \dfrac{1}{n}$. On sait d'après le cours que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$

On veut déterminer un équivalent de H_n à l'infini.

(1) Montrer que pour tout $x > 0$, on a :

$$\frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln x \leq \frac{1}{x}$$

(2) Posons $u_n = H_n - \ln n$ et $v_n = u_{n+1} - u_n$.

(a) Étudier la nature de la série $\sum v_n$

(b) Montrer que la suite (u_n) est convergente.

(On notera γ sa limite, elle s'appelle "constante d'Euler " et vaut approximativement 0.577).

(3) En déduire que $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$.

Exercice 10

(1) Montrer que la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est convergente.

(2) Montrer que $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{n} + \dfrac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n\sqrt{n}}o\left(\dfrac{1}{n}\right)$

(3) Etudier la convergence de la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$

(4) ($Supp$) Montrer que les séries $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $\sum \ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$

sont à termes équivalents mais de nature différentes.

(5) Qu'a-t-on voulu mettre en évidence dans cet exercice?

Exercice 11 $(Supp)$

Série de nombres complexes.

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$. Etudier la série : $\sum \frac{(-1)^n}{n+z}$

Exercice 12 $(Supp)$

(1) Montrer que les deux séries suivantes sont absolument convergentes

$$\sum \frac{1}{n!} \text{ et } \sum \frac{(-1)^n}{2^n}$$

2 En déduire que la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{k! 2^{n-k}} \right]$$

est absolument convergente et déterminer sa valeur.

Exercice 13 $(Supp)$

(I) Considérons la série $\sum_{n \geq 0} \frac{n}{2^n}$ et on note par S_n sa somme partielle.

(1) Montrer que $S_n = 2S_{n+1} + \frac{1}{2^n} - 2$ (Ind: poser $n = (n+1) - 1$)

(2) En déduire que la série est convergente, de somme éguale à 2.

(II) On considère cette fois la série $\sum_{n \geq 0} \frac{\cos n}{2^n}$

Notons $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos k}{2^k}$ et $T_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin k}{2^k}$

(1) Montrer que que $S_n + iT_n$ est la somme des termes d'une suite géométrique.

(2) En déduire que la suite $\left(S_n + iT_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et calculer sa limite.

(3) Montrer que $\sum_{k=0}^{n} \frac{\cos k}{2^k} = \frac{4 - 2\cos 1}{5 - 4\cos 1}$.

Exercice 14 $(Supp)$

On considère la série $\sum_{n \geq 0} (-1)^n \left(\sqrt{n^2 + 1} - n \right)$

(1) Montrer qu'elle est convergente. On note S sa somme.

(2) Est-elle absolument convergente.

(3) Soit S_{49} la somme des 50 premiers termes de la série.

Majorer l'erreur d'approximation $|S - S_{49}|$

Exercice 15 $(Supp)$

(1) Vérifier que la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^4}$ est convergente par deux méthodes.

(2) Trouver une valeur approchée de sa somme S avec une erreur ne dépassant pas 10^{-2}.