Université Abou BakrBelkaïd-Tlemcen
Faculté des Sciences.
Département de Mathématiques
Licence 1 Mathématiques

A.U 2025-2026

Fiche 1 : Fonctions inverses des fonctions trigonométriques
Fonctions inverses des fonctions hyperboliques

Exercice 1

1. Calculer

$$A = \sin \arccos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \cos \arcsin \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

$$B = \arcsin \sin \left(\frac{5\pi}{6} \right) + \arccos \cos \left(\frac{2\pi}{3} \right).$$

2. Trouver les domaines de définitions des fonctions suivantes puis trouver $f'(x)$, $g'(x)$ et $h'(x)$.

$$f(x) = \arcsin(x + \frac{1}{2}), \quad g(x) = \arccos(x^2 - 3), \quad h(x) = \arctan(\frac{1}{\sqrt{2x-1}})$$

Exercice 2

1. Ecrire en fonction de x les fonctions :

$$\cos(\arcsin x), \ \sin(\arccos x), \ \cos(\arctan x).$$

2. En utilisant les dérivées de $(\arcsin x)$, $(\arccos x)$ et $(\arctan x)$, montrer que :

$$\forall x \in [-1, 1] : \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*} : \arctan x + \arctan(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^{-*} : \arctan x + \arctan(\frac{1}{x}) = -\frac{\pi}{2}. \qquad \text{(Supp)}$$

Exercice 3

1. Montrer que l'équation ci-dessous admet une solution puis résoudre l'équation

$$\arcsin x = \arcsin(\frac{4}{5}) + \arcsin(\frac{3}{5})$$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes, aprés avoir déterminer leurs domaines de définitions

1) $\arcsin x = \arccos 2x$	4) $\arcsin x + \arcsin(x\sqrt{3}) = \frac{\pi}{2}$ (supp).
2) $\arcsin(x + \frac{1}{2}) = \arccos x$	5) $\arctan(2x) + \arctan x = \frac{\pi}{4}$. (supp)
3) $\arccos(x^2 - 3) = \frac{\pi}{2}$.	

Exercice 4

A l'aide du théorème des acroissements fini,

1. Calculer

$$\lim_{x \to +\infty} x^3(\arctan x - \arctan \sqrt{x^2 + 1})$$

2. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}^{*+} : \frac{1}{1+x} < \ln(1 + x) - \ln x < \frac{1}{x}.$$

3. Montrer que

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^+, a < b : \frac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \frac{b-a}{1+a^2}. \qquad \text{(supp)}$$

Exercice 5

1. Montrer que
$$\cosh(\alpha+\beta) = \cosh(\alpha)\cosh(\beta) + \sinh(\beta)\sinh(\alpha))$$
$$\sinh(\alpha+\beta) = \sinh(\alpha)\cosh(\beta) + \sinh(\beta)\cosh(\alpha)) \qquad \text{(supp)}$$
2. Calculer $\cosh(\frac{1}{2}\ln 3)$ et $\sinh(\frac{1}{2}\ln 3)$
3. Déduire les solutions de
$$2\cosh x + \sinh x = \sqrt{3}\cosh(5x)$$
4. Montrer que
$$\tanh(x+y) = \frac{\tanh(x) + \tanh(y)}{1 + \tanh(x)\tanh(y)}.$$

Exercice 6

1. Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R} : \arg\sinh x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}).$$
$$\forall x \in [1, +\infty[: \arg\cosh x = \ln(x + \sqrt{x^2-1}).$$
$$\forall x \in]-1, 1[: \arg\tan x = \frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x}).$$
2. Simplifier les expressions suivantes :
$$\cosh(\arg\sinh x) \text{ et } \sinh(\arg\cosh x).$$

Exercice 7 (supp)

Soit la fontion suivante
$$f(x) = \arctan(2x) + \arctan x - \frac{\pi}{4}.$$

1. Calculer $f(0)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
2. Calculer $f'(x)$, déduire le sense de variaion de f.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$, admet une seul solution sur $\mathbb{R}^+$.