Théorème 4.5.25 (inversion d'une fonction) *Une fonction f continue et strictement monotone d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est bijective de I dans $f(I)$ et sa fonction réciproque $f^{-1} : f(I) \to I$ existe , elle est continue et suit la monotonie de f.*

Preuve :
f est surjective de I sur $f(I)$, et comme f est strictement monotone alors f est injective donc bijective sur $f(I)$, alors f^{-1}existe et elle suit la monotonie de f; en effet, on suppose que f est strictement croissante et soient $y_1, y_2 \in f(I)$; tel que $y_1 < y_2$, alors

$$y_1 \neq y_2 \Rightarrow f^{-1}(y_1) \neq f^{-1}(y_2),$$

car f^{-1} est injective aussi ; d'où

$$\exists x_1, x_2 \in I;\ \text{tels que } f^{-1}(y_1) = x_1, f^{-1}(y_2) = x_2$$

donc $x_1 \neq x_2$. On suppose par l'absurde que $x_1 > x_2$ alors comme f est strictement croissante $f(x_1) > f(x_2)$, ce qui est absurde car $y_1 < y_2$, donc

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2),$$

d'où f^{-1} est strictement croissante.

Comme f est continue sur I alors $f(I)$ est un intervalle, or f^{-1} existe d'où $f^{-1}(f(I)) = I$ est un intervalle donc f^{-1} est continue.

□

4.6 Fonctions trigonométriques inverses

4.6.1 Fonction arcsin

$$\begin{array}{rccc} f: & \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] & \to & [-1,1] \\ & x & \mapsto & f(x) = \sin x \end{array}$$

f est continue, strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, alors f est bijective et donc f^{-1} existe, est continue et strictement croissante, et on a

$f\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right) = [-1,1]$ et

$$\begin{array}{rccc} f^{-1}: & [-1,1] & \to & \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ & y & \mapsto & f^{-1}(y) = \arcsin y \end{array}$$

d'où on a :

$$\begin{pmatrix} \arcsin y = x \\ -1 \leq y \leq 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \sin x = y \\ -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$$

voir figure 4.1.

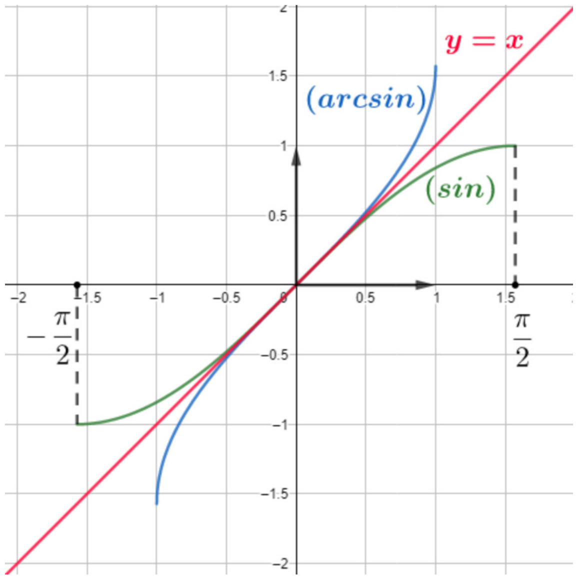

FIGURE 4.1

4.6.2 Fonction arccos

$$\begin{array}{rccc} f: & [0,\pi] & \to & [-1,1] \\ & x & \mapsto & f(x)=\cos x \end{array}$$

f est continue, strictement décroissante sur $[0,\pi]$, alors f est bijective et donc f^{-1} existe, est continue et strictement décroissante et on a

$f([0,\pi]) = [-1,1]$ et

$$\begin{array}{rccc} f^{-1}: & [-1,1] & \to & [0,\pi] \\ & y & \mapsto & f^{-1}(y)=\arccos y \end{array}$$

d'où on a :

$$\begin{pmatrix} \arccos y = x \\ -1 \leq y \leq 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \cos x = y \\ 0 \leq x \leq \pi \end{pmatrix}$$

voir figure 4.2.

4.6.3 Fonction arctan

$$\begin{array}{rccc} f: & \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[& \to &]-\infty,+\infty[\\ & x & \mapsto & f(x)=\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \end{array}$$

f est continue, strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, alors f est bijective et donc f^{-1} existe, est continue et strictement croissante et on a

$f\left(\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\right) =]-\infty,+\infty[$ et

$$\begin{array}{rccc} f^{-1}: &]-\infty,+\infty[& \to & \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\\ & y & \mapsto & f^{-1}(y)=\arctan y \end{array}$$

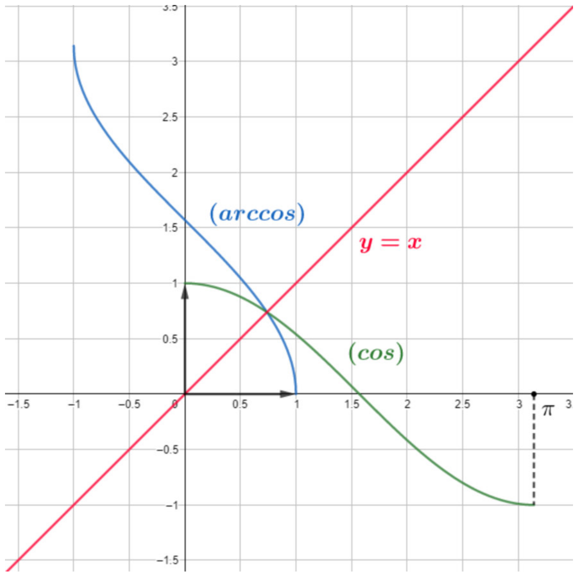

FIGURE 4.2

d'où on a :

$$\begin{pmatrix} \arctan y = x \\ y \in \mathbb{R} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \tan x = y \\ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$$

voir figure 4.3.

.

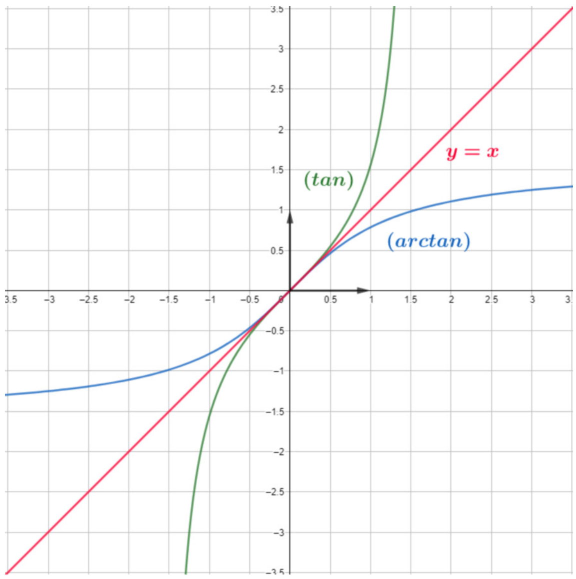

FIGURE 4.3

4.6.4 Fonction arccot

$$\begin{array}{rccc} f: &]0,\pi[& \to &]-\infty,+\infty[\\ & x & \mapsto & f(x) = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \end{array}$$

f est continue, strictement décroissante sur $]0,\pi[$, alors f est bijective et donc f^{-1} existe, est continue et strictement croissante et on a
$f\left(]0,\pi[\right) =]-\infty,+\infty[$ et

$$\begin{array}{rccc} f^{-1}: &]-\infty,+\infty[& \to &]0,\pi[\\ & y & \mapsto & f^{-1}(y) = \operatorname{arccot} y \end{array}$$

d'où on a :

$$\left(\begin{array}{c} \operatorname{arccot} y = x \\ y \in \mathbb{R} \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} \cot x = y \\ 0 < x < \pi \end{array}\right)$$

voir figure 4.4.

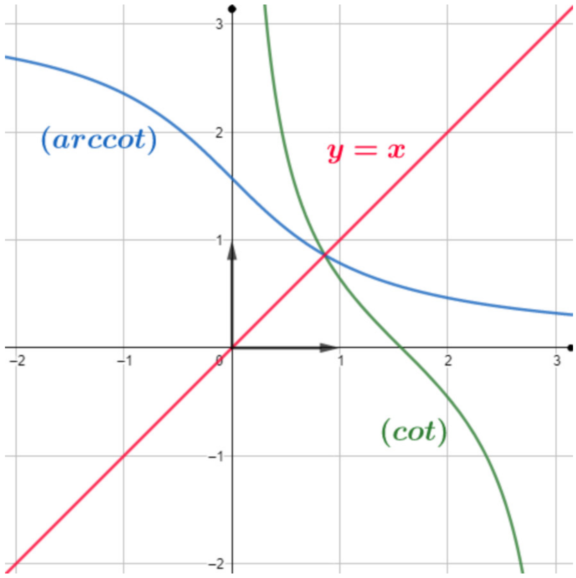

Figure 4.4

Propriétés 12 *:* $\forall x \in [-1,1]$; $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

Remarques :

1. Si $t \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ alors $(\sin t = x) \Leftrightarrow (\arcsin x = t)$
   Sinon
   $$(\sin t = x) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t = \arcsin x + 2k\pi \\ t = (\pi - \arcsin x) + 2k\pi \end{array}\right. ; k \in \mathbb{Z}$$
2. Si $t \in [0,\pi]$ alors $(\cos t = x) \Leftrightarrow (\arccos x = t)$
   Sinon
   $$(\cos t = x) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t = \arccos x + 2k\pi \\ t = -\arccos x + 2k\pi \end{array}\right. ; k \in \mathbb{Z}$$
3. Si $t \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ alors $(\tan t = x) \Leftrightarrow (\arctan x = t)$
   Sinon
   $$(\tan t = x) \Leftrightarrow t = \arctan x + k\pi; k \in \mathbb{Z}$$
4. Si $t \in]0,\pi[$ alors $(\cot t = x) \Leftrightarrow (\operatorname{arccot} x = t)$
   Sinon
   $$(\cot t = x) \Leftrightarrow t = \operatorname{arccot} x + k\pi; k \in \mathbb{Z}.$$

4.7 Fonctions élémentaires

4.7.1 Fonction exponentielle

Définition 4.7.1 *La fonction exponentielle (népérienne), notée* exp *est l'unique fonction dérivable sur* $\mathbb{R}$, *égale à sa dérivée et vérifiant :* $\exp(0) = 1$.

Propriétés 13 *1.* $\forall x \in \mathbb{R} : \exp(x) > 0$.

2. $\forall x, y \in \mathbb{R} : \exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$.

3. Notation d'Euler : On pose $\exp(x) = e^x$ *; où* $e^1 = e \simeq 2.718$, *d'où* $\forall x, y \in \mathbb{R} : e^{x+y} = e^x e^y$, $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$, $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$, $(e^x)^n = e^{nx}, n \in \mathbb{N}$.

4. La fonction exp *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$.

5. $\forall x, y \in \mathbb{R} : \begin{cases} e^x = e^y & \Leftrightarrow x = y. \\ e^x < e^y & \Leftrightarrow x < y. \end{cases}$

6. La fonction $x \mapsto e^x$ *est une bijection de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}_+^*$.

Quelques limites de référence :

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty, \lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1,$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4.7.2 Fonction logarithme népérien

Définition 4.7.2 *On appelle fonction logarithme népérien notée* ln *; la fonction réciproque de la fonction exponentielle, définie de* $]0, +\infty[$ *sur* $\mathbb{R}$ *telle que*

$$\forall x > 0 : x = e^y \Leftrightarrow y = \ln x.$$

Remarque : Les graphes de la fonction logarithme népérien et de la fonction exponentielle sont symétriques par rapport à la première bissectrice i.e la droite d'équation $y = x$, voir figure 4.5.

Propriétés 14 *1.* $\ln 1 = 0$, $\ln e = 1$.

2. $\forall x \in \mathbb{R} : \ln e^x = x$ *et* $\forall x \in \,]0, +\infty[\, : e^{\ln x} = x$.

3. La fonction ln *est strictement croissante sur* $]0, +\infty[$.

4. $\forall x, y \in \,]0, +\infty[\, : \ln x = \ln y \ \Leftrightarrow x = y$.

5. $\forall x, y \in \,]0, +\infty[\, : \ln(xy) = \ln x + \ln y$.

6. $\forall x, y \in \,]0, +\infty[\, : \ln\left(\frac{1}{y}\right) = -\ln y$; $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$

7. $\forall x \in \,]0, +\infty[\, , \forall n \in \mathbb{N} : \ln x^n = n \ln x$.

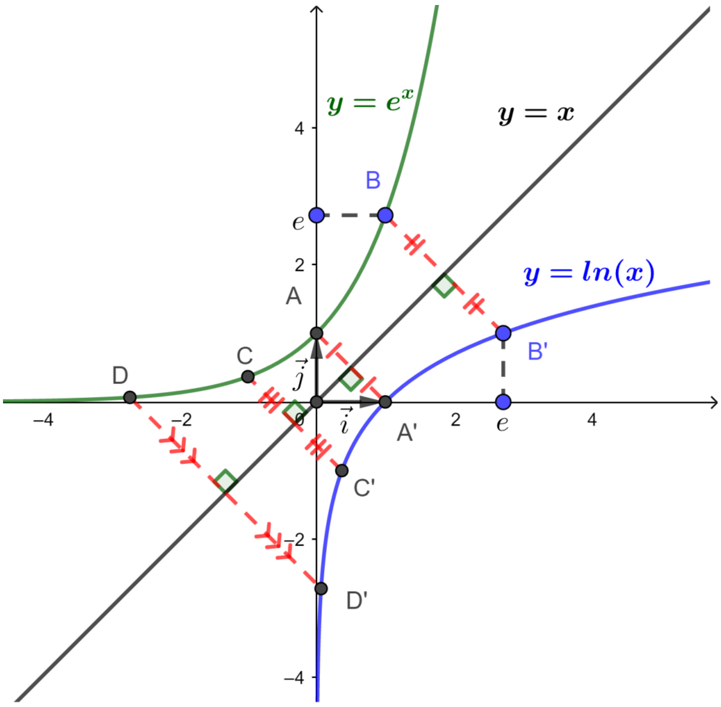

FIGURE 4.5 – Graphes des fonction exponentielle et logarithme népérien

Quelques limites de référence :

1. $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$,
2. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$, $\lim\limits_{x\to -\infty} x^n \ln x = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4.7.3 Fonction logarithme de base quelconque

Définition 4.7.3 *Soit a un réel strictement positif et différent de 1, on appelle fonction logarithme de base a ; la fonction réelle notée $\log_a$ et définie sur $]0, +\infty[$ par*

$$x \mapsto \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

où ln *est le logarithme népérien.*

Pour $a = e$, on retrouve le cas particulier de la fonction logarithme népérien ln, car $\ln e = 1$.

Si $a = 10$, alors la fonction logarithme de base 10 est appelée fonction logarithme décimal, notée log où $\ln 10 \simeq 2,302$, elle est utilisée en chimie.

On a également un autre logarithme utilisé souvent en informatique, c'est le logarithme en base 2 où $\log_2 x = \frac{\ln x}{\ln 2}$.

Propriétés 15 *Soient a et b deux réels strictement positifs et différents de 1, on a :*

1. $\log_a 1 = 0, \log_a a = 1, \log_{\frac{1}{a}} = -\log_a$.

2.
$$\log_a x = \frac{\ln b}{\ln a}\log_b x;\ \forall x > 0.$$
En particulier pour $a = e$ *et* $b = 10$; *on a* $\ln x = \ln 10 \log x$.

3. $\forall x, y \in \left]0, +\infty\right[: \log_a x = \log_a y \ \Leftrightarrow x = y$.
4. $\forall x, y \in \left]0, +\infty\right[: \log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$.
5. $\forall x, y \in \left]0, +\infty\right[: \log_a \left(\frac{1}{y}\right) = -\log_a y;\ \log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
6. $\forall x \in \left]0, +\infty\right[, \forall n \in \mathbb{N} : \log_a (x^n) = n \log_a x$.
7. *La fonction* $\log_a$ *est strictement croissante sur* $\left]0, +\infty\right[$ *pour* $a > 1$ *et strictement décroissante sur* $\left]0, +\infty\right[$ *pour* $0 < a < 1$.

4.7.4 Fonction puissance

Définition 4.7.4 *Soient* a *un réel strictement positif et différent de* 1 *et* x *un réel quelconque, la fonction* a *puissance* x *ou fonction exponentielle de base* a *est la fonction notée* a^x *et définie par*
$$a^x = e^{x \ln a},$$
c'est la fonction réciproque de la fonction $\log_a$ *(logarithme de base* a*).*

Propriétés 16 *Soient* a *et* b *deux réels strictement positifs,* x *et* y *deux réels quelconques :*

1. $a^x > 0;\ \ln a^x = x \ln a$.
2. $1^x = 1,\ a^{x+y} = a^x a^y,\ a^{-x} = \frac{1}{a^x},\ a^{y-x} = \frac{a^y}{a^x}$.
3. $(ab)^x = a^x b^x\ ,\ (a^x)^y = a^{xy}$.
4. *La fonction exponentielle de base* a *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$ *pour* $a > 1$ *et strictement décroissante sur* $\mathbb{R}$ *pour* $0 < a < 1$.
5. *Il existe aussi la fonction définie par* x^a *pour* $a \in \mathbb{R}_+^*$.

4.8 Fonctions hyperboliques et leurs inverses

4.8.1 Fonction cosinus hyperbolique

$$\begin{array}{rccc} f: & \left[0, +\infty\right[& \rightarrow & \left[1, +\infty\right[\\ & x & \mapsto & f(x) = chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \end{array}$$

$D_f = \mathbb{R}$, f est paire.

f est continue et strictement croissante sur $\left[0, +\infty\right[$ alors f^{-1} existe et est continue et strictement croissante et on a $f\left(\left[0, +\infty\right[\right) = \left[1, +\infty\right[$ et

$$\begin{array}{rccl} f^{-1}: & \left[1, +\infty\right[& \rightarrow & \left[0, +\infty\right[\\ & y & \mapsto & f^{-1}(y) = \arg chy \text{ (argument cosinus hyperbolique)} \end{array}$$

d'où on a :

$$\begin{pmatrix} \arg chy = x \\ 1 \leq y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} chx = y \\ 0 \leq x \end{pmatrix}$$

voir figure 4.6

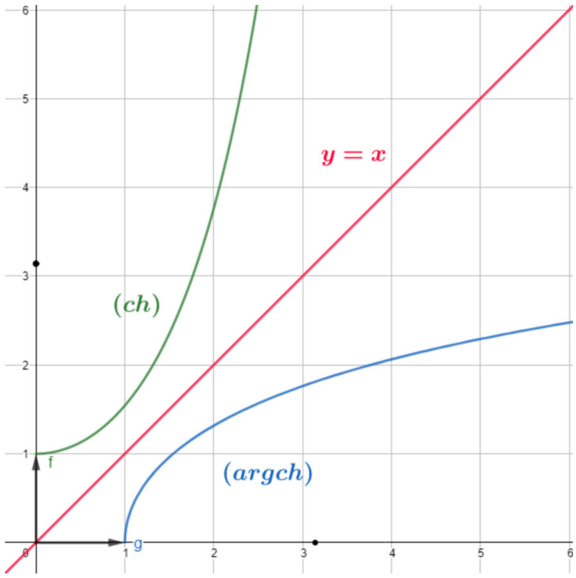

FIGURE 4.6

4.8.2 Fonction sinus hyperbolique

$$\begin{array}{rccc} f: &]-\infty, +\infty[& \rightarrow &]-\infty, +\infty[\\ & x & \mapsto & f(x) = shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{array}$$

$D_f = \mathbb{R}$, f est impaire.

f est continue et strictement croissante sur $]-\infty, +\infty[$ alors f^{-1}existe et est continue et strictement croissante et on a $f\left(]-\infty, +\infty[\right) =]-\infty, +\infty[$ et

$$\begin{array}{rccl} f^{-1}: &]-\infty, +\infty[& \rightarrow &]-\infty, +\infty[\\ & y & \mapsto & f^{-1}(y) = \arg shy \text{ (argument cosinus hyperbolique)} \end{array}$$

d'où on a :

$$\begin{pmatrix} \arg shy = x \\ y \in \mathbb{R} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} shx = y \\ x \in \mathbb{R} \end{pmatrix}$$

voir figure 4.7

4.8.3 Fonction tangente hyperbolique

$$\begin{array}{rccc} f: &]-\infty, +\infty[& \rightarrow &]-1, +1[\\ & x & \mapsto & f(x) = thx = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \end{array}$$

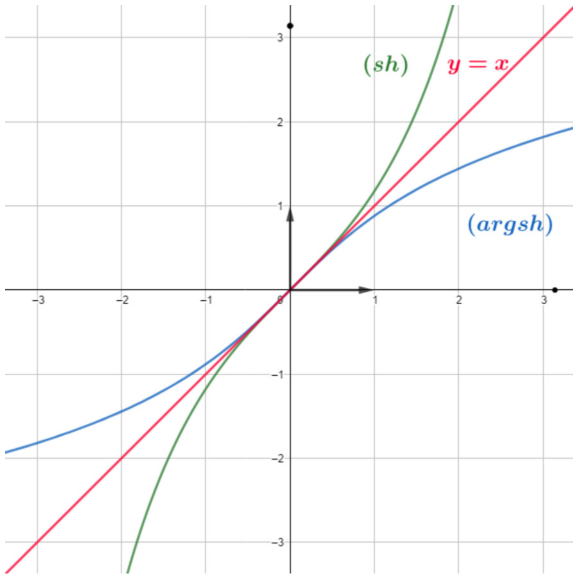

FIGURE 4.7

$D_f = \mathbb{R}$, f est impaire.

f est continue et strictement croissante sur $]-\infty, +\infty[$ alors f^{-1}existe et est continue et strictement croissante et on a $f\left(]-\infty, +\infty[\right) =]-1, +1[$ et

$$\begin{array}{rccl} f^{-1}: &]-1,+1[& \to &]-\infty, +\infty[\\ & y & \mapsto & f^{-1}(y) = \arg thy \text{ (argument cosinus hyperbolique)} \end{array}$$

d'où on a :

$$\begin{pmatrix} \arg thy = x \\ -1 < y < 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} thx = y \\ x \in \mathbb{R} \end{pmatrix}$$

voir figure 4.8

4.8.4 Fonction cotangente hyperbolique

$$\begin{array}{rccc} f: &]0,+\infty[& \to &]1, +\infty[\\ & x & \mapsto & f(x) = \coth x = \frac{1}{thx} = \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} \end{array}$$

$D_f = \mathbb{R}^*$, f est impaire.

f est continue et strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ alors f^{-1}existe et est continue et strictement décroissante et on a $f\left(]0, +\infty[\right) =]1, +\infty[$ et

$$\begin{array}{rccl} f^{-1}: &]1,+\infty[& \to &]0, +\infty[\\ & y & \mapsto & f^{-1}(y) = \arg\coth y \text{ (argument cosinus hyperbolique)} \end{array}$$

d'où on a :

$$\begin{pmatrix} \arg\coth y = x \\ y > 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \coth x = y \\ x > 0 \end{pmatrix}$$

voir figure 4.9

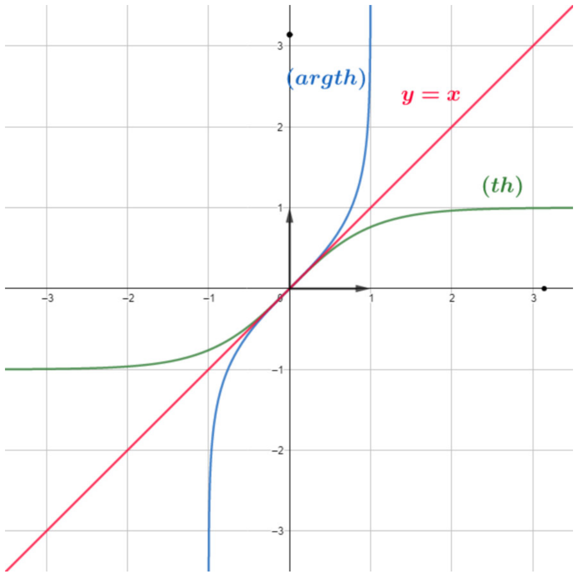

FIGURE 4.8

Propriétés 17

1. $chx + shx = e^x$.
2. $chx - shx = e^{-x}$.
3. $ch^2x - sh^2x = 1$.
4. $1 - th^2x = \frac{1}{ch^2x}$.
5. $ch(x+y) = chx.chy + shx.shy$.
6. $sh(x+y) = shx.chy + chx.shy$.

Expression sous forme logarithmique.

Les fonctions réciproques des fonctions hyperboliques s'expriment à l'aide de la fonction logarithme népérien, comme suit

$$\begin{array}{l} \arg thx = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \forall x \in \left]-1,1\right[. \\ \arg\coth x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{x-1}\right), \forall x \in \left]-\infty,-1\right[\cup \left]1,+\infty\right[. \\ \arg shx = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right), \forall x \in \mathbb{R}. \\ \arg chx = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right), \forall x \geq 1. \end{array}$$

Preuve :

1. Soit $x \in \left]-1,1\right[$, on pose $\arg thx = y$

$$\begin{array}{l} \arg thx = y \Leftrightarrow thy = x \Leftrightarrow \frac{e^y-e^{-y}}{e^y+e^{-y}} = x \\ \Leftrightarrow \frac{1-e^{-2y}}{1+e^{-2y}} = x \Leftrightarrow 1-e^{-2y} = x\left(1+e^{-2y}\right) \\ \Leftrightarrow e^{-2y}(1+x) = 1-x \\ \Leftrightarrow e^{2y} = \frac{1+x}{1-x} \Leftrightarrow 2y = \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| \\ \Leftrightarrow y = \arg thx = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right). \end{array}$$

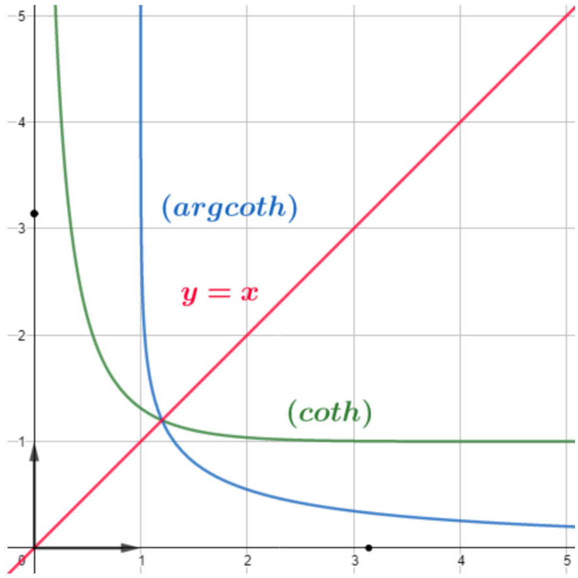

FIGURE 4.9

2. Soit $x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, on pose $\arg\coth x = y$

$$\begin{aligned}
&\arg\coth x = y \Leftrightarrow \coth y = x \Leftrightarrow \tfrac{e^{y}+e^{-y}}{e^{y}-e^{-y}} = x \\
&\Leftrightarrow \tfrac{1+e^{-2y}}{1-e^{-2y}} = x \Leftrightarrow 1 + e^{-2y} = x\left(1 - e^{-2y}\right) \\
&\Leftrightarrow e^{-2y}\left(1 + x\right) = x - 1 \\
&\Leftrightarrow e^{2y} = \tfrac{1+x}{x-1} \Leftrightarrow 2y = \ln\left|\tfrac{1+x}{x-1}\right| \\
&\Leftrightarrow y = \arg thx = \tfrac{1}{2}\ln\left(\tfrac{1+x}{x-1}\right).
\end{aligned}$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$, on pose $\arg shx = y$

$$\arg shx = y \Leftrightarrow shy = x$$

et on a
$$e^{y} = shy + chy \ \text{ et } chy = \sqrt{sh^{2}y + 1}$$

alors
$$e^{y} = x + \sqrt{x^{2}+1} \Leftrightarrow y = \arg shx = \ln\left(x + \sqrt{x^{2}+1}\right).$$

4. Soit $x \geq 1$, on pose $\arg chx = y$

$$\arg chx = y \Leftrightarrow chy = x$$

et on a
$$e^{y} = chy \ + shy \ \text{ et } shy = \sqrt{ch^{2}y - 1}$$

alors
$$e^{y} = x + \sqrt{x^{2}-1} \Leftrightarrow y = \arg chx = \ln\left(x + \sqrt{x^{2}+1}\right).$$

□