Chapitre 1

Fonctions d'une variable réelle

1.1 Définitions et propriètès

Une fonction réelle d'une variable réelle. $f : D \to \mathbb{R}$ est une application d'une partie $D \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

- Si $D = D_f$, alors f est une application et si $D = \mathbb{R}$, alors f est une fonction.
- Pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ estl limage de x par la fonction f.
- D_f désigne l'ensemble de définition de la fonction f et c'est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$, tels que $f(x)$ est définie.
- Le sous ensemble de $\mathbb{R}^2$ défini par $\varphi(f) = \{(x, f(x)), x \in D_f\}$ est le graphe de la fonction f et est représenté dans le plan $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

Exemple 1.1

1) Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ *alors* f *est une application.*

2) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{x}$ *alors* g *est une fonction.*

Exemple 1.2 ***Domaines de définition.***

1) Soit $f(x) = x^2 + E\left(\dfrac{1}{1 - E(x^2)}\right)$, *On doit avoir* $1 - E(x^2) \neq 0$, *i.e.* $E(x^2) \neq 1$. *Or* $E(x^2) = 1$ *si* $x^2 \in [1, 2)$, *c.-Ã -d.* $x \in (-\sqrt{2}, -1] \cup [1, \sqrt{2})$. *Donc*

$$D_f = \mathbb{R} \setminus (-\sqrt{2}, -1] \cup [1, \sqrt{2}).$$

2) Pour $g(x)=\sqrt{4-|x-1|}$*, il faut* $4-|x-1|\geq 0$*, soit* $|x-1|\leq 4$*, i.e.* $x\in[-3,5]$*.*
Donc $D_g=[-3,5]$*.*
3) Pour $h(x)=\dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right)$*, on exige* $x\neq 0$ *et l'argument du logarithme* >0*.*
Pour $x\neq 0$*,* e^x-1 *a le meme signe que* x*, donc* $(e^x-1)/x>0$*. Donc* $D_h=\mathbb{R}\setminus\{0\}$*.*
*4) (**Supp**)*

$$f(x)=\frac{x+3}{2E(x)-1},\ g(x)=\frac{x-\sqrt{|x^2-1|}}{\sqrt[3]{x^3-1}},\ h(x)=\frac{\sqrt{\ln x}}{1-\ln x}$$

Définition 1.1 *Soit* $f:D_f\to\mathbb{R}$*, la fonction* f *est dite paire si pour tout* $x\in D_f$*,* $f(x)=f(-x)$ *et elle est impaire si pour tout* $x\in D_f$*,* $f(x)=-f(-x)$*.*

Exemple 1.3 *Etudier la parité des fonctions suivantes:*
1) $f(x)=\dfrac{1-e^x}{1+e^x}$ *est définie sur* $\mathbb{R}$ *et*

$$f(-x)=\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}=\frac{e^x-1}{e^x+1}=-\frac{1-e^x}{1+e^x}=-f(x),$$

donc f *est impaire.*
2) $g(x)=\sin x-\cos x$ *est définie sur* $\mathbb{R}$*.*
On a $g(-x)=-\sin x-\cos x$*, qui ni paire ni impaire.*
3) $h(x)=\dfrac{x^4}{|x|-1}$*: le domaine est* $D=\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$*.*
Comme $(-x)^4=x^4$ *et* $|-x|-1=|x|-1$*, on a* $h(-x)=h(x)$*:* h *est paire.*

Exercice 1 *En posant* $f_1(x)=f(x)+f(-x)$ *et* $f_2(x)=f(x)-f(-x)$*.*
Montrer que f_1 *est paire et que* f_2 *est impaire.*

Solution 1 *Pour toute fonction* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$*,*

$$f_1(x)=f(x)+f(-x)\Rightarrow f_1(-x)=f(-x)+f(x)=f_1(x)$$

Ainsi f_1 *est paire, et*

$$f_2(x)=f(x)-f(-x)\Rightarrow f_2(-x)=f(-x)-f(x)=-f_2(x)$$

d'où: f_2 *est impaire.*

Interprétation géométrique

Si f est paire alors f est symétrique par rapport à Ìaxe (Oy) et si f est impaire alor f est symétrique par rapport au point O.

Définition 1.2 *Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$. On dit que f est* ***périodique*** *dans D_f de période T si et seulement si:*

$$\exists T > 0;\ \forall x \in D_f; f(x+T) = f(x)$$

Si le nombre réel

$$T = \inf T > 0; \forall x \in D_f;\ f(x+T) = f(x)$$

existe et est strictement positive alors T est appellé pèriode de f .

Exercice 2

1) $f(x) = \cos x$ *est une fonction périodique de période* 2π.

2) $f(x) = \sin(x - [x])$ est une fonction périodique de période 1.

En effet

$$\sin(x + 1 - E(x+1)) = \sin x + 1 - (E(x) + 1) = \sin(x - E(x)).$$

La fonction est de pèriode $T = 1$

Définition 1.3 *Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$, une fonction on dit que f est*

* ***Majorée*** *dans D_f s'il existe une constante $M \in \mathbb{R}$ qui vérifie: $\forall x \in D_f,\ f(x) \leq M$.*

* ***Minorée*** *dans D_f s'il existe une constante $m \in \mathbb{R}$ qui vérifie: $\forall x \in D_f,\ m \leq f(x)$.*

* ***Bornée*** *dans D_f si elle est majorée et minorée à la fois: $\forall x \in D_f,\ m \leq f(x) \leq M$.*

Exemple 1.4 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto y = f(x) = -x^2$*

f est majorée par 0, car $\forall x \in D_f = \mathbb{R},\ -x^2 \leq 0$.

Définition 1.4 *Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ et soit $\operatorname{Im} f = f(D_f) = \{f(x),\ x \in D_f\} \subset \mathbb{R}$.*

1) On dit que f admet un maximum ou une valeur maximale ou plus grand valeur $M = \sup f$ si

$$\exists M \in \mathbb{R},\ \begin{cases} \forall x \in D_f;\ f(x) \leq M \\ \exists x_0 \in D_f;\ f(x) = M \\ M \in \operatorname{Im} f \end{cases}$$

2) On dit que f admet un minimum ou une valeur minimale ou plus petite valeur $m = \inf f$ si

$$\exists m \in \mathbb{R}, \begin{cases} \forall x \in D_f;\ f(x) \geq m \\ \exists x_0 \in D_f;\ f(x) = M \\ m \in \operatorname{Im} f \end{cases}$$

Exemple 1.5 *Soit $f : D_f = \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto y = f(x) = 1 - x^2$*

$$\max f = 1 \text{ en effet, } \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}; 1 - x^2 \leq 1 \\ \exists x_0 \in \mathbb{R};\ f(x_0) = 1 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

On dit q'un maximum est atteind.

On rappelle borne superieure de f est le plus petit des majorants de f s'il existe, on note $\sup f$ ou $\sup f(x)$ ou $\sup\limits_{x \in D_f,} f(x)$.

Exemple 1.6 *Soit $X = [1, +\infty[$, déterminer $\sup \frac{1}{x}$, $\inf \frac{1}{x}$, $\min \frac{1}{x}$, $\max \frac{1}{x}$.*
En effet
La fonction $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $[1, +\infty)$.
Pour $x \geq 1$, on a $0 < \dfrac{1}{x} \leq 1$. Ainsi :

$$f(X) = \left\{\tfrac{1}{x} : x \geq 1\right\} = (0, 1].$$

$\sup f(X) = 1$, *atteint en $x = 1$.*

$\inf f(X) = 0$, *mais $0 \notin f(X)$.*

$\max f = 1$, *car $1 \in (0, 1]$.*

$\min f$ *n'existe pas (aucun x ne donne $f(x) = 0$).*

Définition 1.5 *Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$, une fonction et $I \subset D_f$ un interalle de $\mathbb{R}$. On dit que f est*
** **Croissante** dans D_f si et seulement si:*

$$\forall x_1, x_2 \in D_f; x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

Définition équivalente

$$\forall x_1, x_2 \in D_f; x_1 \neq x_2 \Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \geq 0$$

* ***Strictement croissante*** *dans* D_f *si et seulement si:*

$$\forall x_1, x_2 \in D_f; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

***** ***Décroissante*** *dans* D_f *si et seulement si:*

$$\forall x_1, x_2 \in D_f; x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2).$$

Définition équivalente

$$\forall x_1, x_2 \in D_f;\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leq 0.$$

***** ***Strictement décroissante*** *dans* D_f *si et seulement si:*

$$\forall x_1, x_2 \in D_f; x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

***** *Une fonction* ***monotone (resp. strictement monotone)*** *est une fonction qui est ou bien croissante ou bien décroissante (resp. strictement croissante ou bien strictement décroissante).*
***** *Une fonction* f *est dite* **constante** *dans* D_f *si et seulement si:*

$$\forall x_1, x_2 \in D_f; x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2).$$

Exemple 1.7 *Vérifier si les fonctions suivantes sont strictement monotones sur leurs domaines de définitions:*

$$\sqrt{x},\ x^3,\ \frac{1}{x}.$$

1) Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = \sqrt{x}$

Soit $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$*,tel que* $(x_1 \neq x_2)$ *et cherchons le signe de* $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$,

$$\alpha = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\left(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}\right)}{x_1 - x_2} = \frac{\left(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}\right)\left(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}\right)}{(x_1 - x_2)\left(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}\right)} = \frac{1}{\left(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}\right)} > 0$$

donc f *est croissante* f *est dite strictement croissante.*

2)

$$\alpha = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\left(x_1^3 - x_2^3\right)}{x_1 - x_2} = x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 = (x_1 + x_2)^2 - x_1 x_2$$

Puisque $(x_1 + x_2)^2 > 0$, *alors le signe de* α *et le meme que le signe de* $(-x_1 x_2)$

Si x_1 *et* x_2 *ont le meme signe alors* $\alpha < 0$, *ainsi la fonction* $f(x) = x^3$ *est décroissante*

Si x_1 *et* x_2 *ont un signe différent alors* $\alpha > 0$, *ainsi la fonction* $f(x) = x^3$ *est croissante*

3) $1/x$ *est strictement décroissante sur* $(0, \infty)$: $0 < x < y \Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{y}$. *Sur* $(-\infty, 0)$, *elle est strictement croissante:* $x < y < 0 \Rightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{y}$.

1.1.1 Opérations algèbriques sur les fonctions:

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soient f et g deux fonctions définies sur I et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Les fonctions $f + g$, λf, $f \times g$ et f/g sont définies pour $x \in I$ par

1) $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ et $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$.

2) $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$ et $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$ quand $g(x) \neq 0$.

3) Deux fonctions f et g de I dans $\mathbb{R}$ sont égales si $f(x) = g(x)$ pour tout x élément de I.

1.1.2 Composition de deux fonctions

Définition 1.6 *Soit* $f : D_f \to \mathbb{R}$, $g : D_g \to \mathbb{R}$.

** Si* $g(D_g) \subset D_f$ *alors* $f \circ g$ *existe et on a:* $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

** Si* $f(D_f) \subset D_g$ *alors* $g \circ f$ *existe et on a:* $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Remarque 1.1 *Dans le cas général* $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$.

Exemple 1.8

$$f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}^{+*} \qquad g : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$$
$$x \to f(x) = \sqrt{x} \quad x \to g(x) = \ln x$$

Ainsi $g \circ f$ *existe car* $f(D_f) = \mathbb{R}^{+*} \subset \mathbb{R}^{+*} = D_g$ *et*

$$\begin{aligned} g \circ f \quad &: \quad \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R} \\ x \quad &\to \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)) = \ln \sqrt{x}. \end{aligned}$$

Mais $f \circ g$ *n'existe pas car* $g(D_g) = \mathbb{R} \notin \mathbb{R}^{+*} = D_f$.

1.1.3 Fonction injective, surjective, bijective

Dans ce qui suit, on donne les notions d'injectivité, surjectivité et de bijectivité d'une fonction entre deux ensembles :

Soit $f :\ A \to B$ une fonction avec A et B deux ensembles.

On note $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$ l'image de A par f.

Injectivité

Définition 1.7 (Coté lois mathématiques) *La fonction* $f : A \to B$ *est* ***injective*** *si pour tout* $x_1, x_2 \in A$,

$$x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Autrement dit, des x distincts donnent des images distinctes.
Une manière pratique de montrer l'injectivité est de prendre $f(x_1) = f(x_2)$ *et démontrer que cela entraine* $x_1 = x_2$.

Définition 1.8 *[**Coté table de variation**] Si une fonction est strictement monotone (strictement croissante ou strictement décroissante) sur son domaine, alors elle est injective sur ce domaine.*
Ainsi, la présence d'une monotonie stricte dans la table de variation est un critère suffisant.

Définition 1.9 *[**Coté graphe**] Graphiquement, une fonction est injective si toute droite horizontale coupe le graphe au plus en un point {0,1}.*

Exemple 1.9 *$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Ceci n'est pas injectif sur $\mathbb{R}$ car $f(1) = f(-1) = 1$. Cependant, f est injective sur $[0, +\infty)$ puisque sur ce domaine la fonction est strictement croissante.*

Surjectivité

Définition 1.10 (Coté lois mathématiques) *La fonction $f : A \to B$ est **surjective** si*

$$\forall y \in B, \exists x \in A \text{ tel que } f(x) = y.$$

Autrement dit, pour montrer la surjectivité, on prend un y arbitraire de B et on cherche un $x \in A$ tel que $f(x) = y$.

Définition 1.11 *[**Coté table de variation**] f continue plus $f(A) = B$.*

Définition 1.12 *[**Coté graphe**] Graphiquement, une fonction est surjective si toute droite horizontale coupe le graphe au moins une fois {1,2,...}.*

Exemple 1.10 *$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. pour que f soit surjective sur $\mathbb{R}$, il faudrait que*

$$\forall y \in B, \exists x \in A \text{ tel que } f(x) = y.$$

Or pour $y < 1$, l'equation $x^2 = y$ n'a pas de solution réelles.
Ainsi aucun $x \in \mathbb{R}$ ne satisfait $f(x) = -1$, par contre f est surjectif sur $\mathbb{R}^+$.

Bijectivité

Définition 1.13 (Coté lois mathématiques) *La fonction $f : A \to B$ est **bijective** si elle est à la fois injective et surjective.*

$$\forall y \in B, \exists! x \in A \text{ tel que } f(x) = y.$$

Définition 1.14 *[**Coté table de variation**] Si une fonction est strictement monotone et continue sur son domaine et si son image recouvre l'ensemble d'arrivée.*

Définition 1.15 *[**Coté graphe**] Graphiquement, une fonction est bijective si toute droite horizontale coupe le graphe éxactement une seul fois {1}.*

Exemple 1.11 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+},\ f(x) = x^2$ *est bijective sur* $\mathbb{R}^{+}$.

Définition 1.16 (fonction inverssible) *Soient* U *et* V *deux intervalle de* $\mathbb{R}$,
la fonction $f : U \to V$ *est dite inverssible sil existe une fonction* $g : V \to U$ *telle que:*

$$(g \circ f)(x) = x \text{ et } (f \circ g)(y) = y$$

La fonction g *est dite l'inverse de* f *et on note* f^{-1}

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

Remarque 1.2 *La fonction* g *existe si la fonction* f *est bijective dans ce cas, meme la fonction* g *est bijective.*

Exemple 1.12

$$\begin{array}{cc} f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R} & g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+*} \\ x \to f(x) = \ln x & x \to g(x) = e^x \end{array}$$

Puisque f *et* g *sont bijective on a*

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = e^{\ln x} = x. \\ (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = \ln e^x = y \end{aligned}$$

Ainsi $y = \ln x \Leftrightarrow x = e^y = f^{-1}(y)$.

Remarque 1.3 *Le graphe de la fonction inverse* f *est la partie* $\varphi(f^{-1}) = \left\{(y, f^{-1}(y)), y \in V\right\}$ *ainsi* $\varphi(f)$ *et* $\varphi(f^{-1})$ *sont symétrique par rapport a la premiere bissectrice d'équation* $x = y$.

1.2 Les limites

1.2.1 Voisinage d'un point

Définition

Soit $a \in \mathbb{R}$, on dit que V est un voisinage de a si et seulement si il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\subset V$,

Autrement dit: Un voisinage de a est un intervalle contenant un intervalle ouvert qui contient a.

Exemple

$]3,4[$ est un voisinage de π. $]-\varepsilon, \varepsilon[$ est un voisinage de 0, $]3,4[$ n'est pas un voisinage de 3.

Remarque 1.4

Si $\exists a \in \mathbb{R}^+$, $[x_0, x_0+a[\subset V$ *on dit que* V *est un voisinage à droite de* x_0.

Si $\exists a \in \mathbb{R}^+$, $]x_0-a, x_0] \subset V$ *on dit que* V *est un voisinage à gauche de* x_0.

Exemple 1.13 $V =]e,4] \cup \{6\}$ *est un voisinage à gauche de* 4.

1.2.2 Point d'accumulation d'un ensemble

La notion de point d'accumulation permet de définir rigoureusement les limites de fonctions. Les limites unilatérales sont essentielles pour l'étude des discontinuités et de la continuité globale d'une fonction.

Définition 1.17 (Définition rigoureuse (mathématique)) *Soit* $E \subset \mathbb{R}$ *et* $a \in \mathbb{R}$. *On dit que* a *est un point d'accumulation de* E *si :*
$\forall \varepsilon > 0$, $E \cap (]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\setminus \{a\}) \neq \emptyset$.

Autrement dit :

un point a est un point d'accumulation de E, si, aussi près de a qu'on se place, il existe toujours un point de E différent de a.

Ainsi un point qui n'est pas point d'accumulatoon s'appelle point isolé.

Remarque 1.5

1) Un point isolé de E *est toujours dans* E

2) Un point d'accumulation de E *n'est pas toujours dans* E.

Exemple 1.14

1) $E = [0,1[\cup \{\pi\}$

0 *est un point d'accumulation de* E *car* $E \cap (]0-\varepsilon, 0+\varepsilon[\setminus\{0\}) =]0, 0+\varepsilon[\neq \emptyset$.

1 *est un point d'accumulation de* E *car* $E \cap (]1-\varepsilon, 1+\varepsilon[\setminus\{1\}) =]1-\varepsilon, 1[\neq \emptyset$.

π *n'est pas un point d'accumulation de* E *(point isolé)car* $E \cap (]\pi-\varepsilon, \pi+\varepsilon[\setminus\{\pi\}) = \emptyset$.

2) Chaque point de $[0,1]$ *est un point d'accumulation de* $[0,1]$.

3) L'ensemble $\mathbb{Z}$ *n'a aucun point d'accumulation dans* $\mathbb{R}$.

1.2.3 Limite finie d'une fonction en un point

Définition 1.18 *Soit* f *une fonction définie au voisinage d'un point* x_0*, sauf peut etre en* x_0*, soit* $l \in \mathbb{R}$ *. on dit que la limite de* f *en* x_0 *est égale a* l *si*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0, \forall x \in D_f,\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Exemple 1.15

1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ f(x) = x$ *et* $x_0 = 2$

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ 2 \in D_f}} f(x) = 2 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0, \forall x \in D_f,\ 0 < |x-2| < \delta \Rightarrow |x-2| < \varepsilon$$

Soit ε *fixé. Il suffit de choisir* $\delta \leq \varepsilon$ *car pour* $|x-2| < \delta$ *et* $\delta \leq \varepsilon$ *on a* $|x-2| < \varepsilon$.

2) $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R},\ \ f(x) = x\sin(\frac{1}{x})$ *et montrons que* $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ 0 \in D_f}} x\sin(\frac{1}{x}) = 0$.

$x_0 = 0$ *est bien un point d'accmulation*

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ 0 \in D_f}} x\sin(\frac{1}{x}) = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0, \forall x \in D_f,\ 0 < |x-0| < \delta \Rightarrow |x\sin(\frac{1}{x}) - 0| < \varepsilon$$

Soit ε *fixé. Cherchons* $\delta > 0$ *tel que si* $0 < |x| < \delta$ *on a* $|x\sin(\frac{1}{x})| < \varepsilon$.

$$|x\sin(\frac{1}{x})| = |x| \times |\sin(\frac{1}{x})| \leq |x| \times 1 < \varepsilon$$

Il suffit de choisir $\delta \leq \varepsilon$ *pour que* $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ 0 \in D_f}} x\sin(\frac{1}{x}) = 0$.

Exercice 3 *Montrer, en utilisant la définition de la limite d'une fonction en un point, que*

$$\lim_{x\to 1} 7x+3 = 10, \quad \lim_{x\to 0} \frac{x+4}{x-1} = -4$$

Remarque 1.6 *One cherche la limite d'une fonction en un point que si c'est un point d'accumulation on note* $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x\in D_f}} f(x) = l$.

Théorème 1.1 (Unicité de la limite) *Si* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ *existe, elle est unique.*

Preuve: Supposons deux limites distinctes $\ell_1 \neq \ell_2$. On pose $\varepsilon = |\ell_1 - \ell_2|/3$. Les conditions de convergence impliquent l'existence de δ_1, δ_2 tels que $|f(x) - \ell_i| < \varepsilon$ pour $|x - a| < \delta_i$. En prenant $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ et x proche de a, on obtient

$$|\ell_1 - \ell_2| \leq |f(x) - \ell_1| + |f(x) - \ell_2| < 2\varepsilon = \tfrac{2}{3}|\ell_1 - \ell_2|,$$

contradiction. Donc $\ell_1 = \ell_2$. ∎

Théorème 1.2 *Soit* $a \in \mathbb{R}$ *et* $f, g : D \to \mathbb{R}$ *deux fonctions définies sur un voisinage de* a. *Si* f *est bornée prés de* a *(il existe* $M > 0$ *tel que* $|f(x)| \leq M$ *pour* x *proche de* a*) et si* $g(x) \to 0$ *quand* $x \to a$, *alors* $(f \times g)(x) \to 0$ *quand* $x \to a$.

Preuve: Soit $\varepsilon > 0$. Comme $g(x) \to 0$ en a, il existe $\delta_1 > 0$ tel que

$$0 < |x - a| < \delta_1 \quad \Rightarrow \quad |g(x)| < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Par hypothèse, f est bornée prés de a, donc il existe $M > 0$ et $\delta_0 > 0$ tels que

$$0 < |x - a| < \delta_0 \quad \Rightarrow \quad |f(x)| \leq M.$$

Posons $\delta = \min(\delta_0, \delta_1)$. Alors pour $0 < |x - a| < \delta$,

$$|f(x)g(x)| \leq M\,|g(x)| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

Ainsi, par définition de la limite, $(f \times g)(x) \to 0$ quand $x \to a$. ∎

Définition 1.19 (pratique) *Soit* $f : D_f \to \mathbb{R}$ *et* a *un point d'accumulation de* D_f.
On dit que f *admet la limite* $\ell \in \mathbb{R}$ *en* a, *et on écrit* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$, *si pour toute suite* $(x_n) \subset D_f \setminus \{a\}$ *telle que* $x_n \to a$, *on a* $f(x_n) \to \ell$.

1.2.4 Limites à droite et à gauche

Définition 2

1) On dit que f *admet une* ***limite à droite*** *en* a *si* f *est définie à droite d'un point d'accumulation* a, *sauf peut etre* a.

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = l_1 \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0, \forall x \in D_f,\ (x_0 < x < x_0 + \delta) \Rightarrow |f(x) - \ell_1| < \varepsilon$$

2) De même, f *admet une* ***limite à gauche*** *en* a *si* f *est définie à gauche d'un point d'accumulation* a, *sauf peut etre* a.

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = l_2 \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0, \forall x \in D_f,\ (x_0 - \delta < x < x_0) \Rightarrow |f(x) - \ell_2| < \varepsilon$$

Proposition 3 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ *existe si et seulement si* $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ *existent et sont égales.*

Exemple 1.16 *Soit* $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = \frac{\sqrt{x^2}}{x}$.
0 *est un point d'accumulation, alors*

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} -\frac{x}{x} = -1$$

et

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

donc la limite en 0 *n'existe pas.*

1.2.5 Propriétés des limites

Soit $f : E \to \mathbb{R}$ et $g : E \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de x_0 sauf peut etre en x_0,

supposons que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l_1$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l_2$.

1) $\forall\alpha, \beta \in \mathbb{R} \lim\limits_{x\to x_0} (\alpha f(x) \pm \beta g((x) f(x) = \alpha l_1 \pm \beta l_2$.

2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\times g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \times \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2}$si $l_1 \neq l_2$.

3) $\forall x \in E,\ f(x) \leq g(x) \Rightarrow l_1 \leq l_2$.

4) Soient f, g, h définies au voisinage V de a telles que :

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x), \quad \forall x \in V.$$

Si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = l$, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$.

5) $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = |l_1|$.

1.2.6 Limites infinies en l'infinie

Définition 1.20 *Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$, x_0 un point d'accumulation de D_f.*

1) On dit que f admet une limite $+\infty$. quand x tend vers x_0, si

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall A > 0,\ \exists \delta > 0, \forall x \in D_f,\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > A$$

2) On dit que f admet une limite -∞. quand x tend vers x_0, si

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall A > 0,\ \exists \delta > 0, \forall x \in D_f,\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -A$$

Exemple 1.17 *Montrons que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{|x|} = +\infty$*

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{|x|} = +\infty \Leftrightarrow \forall A > 0,\ \exists \delta > 0, \forall x \in D_f,\ 0 < |x| < \delta \Rightarrow \frac{1}{|x|} > A$$

Soit $A > 0$ fixé, on cherche $\delta > 0$ telle que si $0 < |x| < \delta$ on a $\frac{1}{|x|} > A$ $\frac{1}{|x|} > A \Rightarrow |x| < \frac{1}{A}$, il suffit de choisir $\delta_\varepsilon \leq \frac{1}{A}$, pour que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{|x|} = +\infty$.

Définition 1.21 *Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$,*

1) On dit que f admet une limite l. quand x tend vers $+\infty$, si

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists B > 0,\ \textit{tel que pour tout } x \in D_f,\ (x > B) \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

2) On dit que f admet une limite l. quand x tend vers -∞ , si

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=l \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists B>0,\ \textit{tel que pour tout } x\in D_f,\ (x<-B)\Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon$$

Exemple 1.18 *Montrons que* $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+2}{x-1}=1,\ D_f=\mathbb{R}-\{1\}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+2}{x-1}=1 \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists B>0,\ \textit{tel que pour tout } x\in D_f,\ (x>B)\Rightarrow |\frac{x+2}{x-1}-1|<\varepsilon$$

Soit $\varepsilon>0$ fixé, on cherche $B>0$ tel que si $x>B$ on a $|\frac{x+2}{x-1}-1|<\varepsilon$

or

$$|\frac{x+2}{x-1}-1|<\varepsilon \Leftrightarrow |\frac{x+2-x+1}{x-1}|=\frac{3}{|x-1|}=\frac{3}{x-1}<\varepsilon$$

$$\frac{3}{x-1}<\varepsilon\Rightarrow x>\frac{3}{\varepsilon}+1$$

il suffit de choisir $x_\varepsilon>B=\frac{3}{\varepsilon}+1$,pour que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+2}{x-1}=1$.

Définition 1.22 *Soit $f:D_f\to\mathbb{R}$*

1) On dit que f admet une limite $+\infty$. quand x tend vers $+\infty$, si

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \forall A>0,\ \exists B>0,\ \textit{tel que pour tout } x\in D_f,\ (x>B)\Rightarrow f(x)>A$$

2) On dit que f admet une limite -∞. quand x tend vers $+\infty$, si

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \forall A>0,\ \exists B>0,\ \textit{tel que pour tout } x\in D_f,\ (x>B)\Rightarrow f(x)<-A$$

3)On dit que f admet une limite $+\infty$. quand x tend vers -∞ , si

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \forall A>0,\ \exists B>0,\ \textit{tel que pour tout } x\in D_f,\ (x<-B)\Rightarrow f(x)>A$$

4) On dit que f admet une limite -∞. quand x tend vers -∞ , si

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \forall A>0,\ \exists B>0,\ \textit{tel que pour tout } x\in D_f,\ (x<-B)\Rightarrow f(x)<-A$$

Formes indèterminées : $0/0$, ∞/∞, 1^∞, $\infty-\infty$, $0\cdot\infty$, 0^0, ∞^0.

Exemple 1.19 *Calculer les limites suivantes :*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{x^3+x+2}, \quad \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}, \quad \lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x+1}-\sqrt{x}).$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{x\sin x-\cos x+1}{x^2}, \quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}.$$

Proposition 4

1) Si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue en x_0 et $g : J \to \mathbb{R}$ est continue en $y_0 = f(x_0)$, alors $g \circ f$ est continue en x_0.

2) Si $f, g : I \to \mathbb{R}$ sont continues en x_0, alors $f+g$ et $f-g$ sont continues en x_0, et si $g(x_0) \neq 0$, alors $\dfrac{f}{g}$ est continue en x_0.

1.3 Continuité

Géométriquement une fonction continue à un graphe sans cassure et une fonction continue ne casse pas les intervalles.

Définition 1.23 *Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ une fonction et soit x_0 un point d'accumulation de D_f tel que $x_0 \in D_f$. On dit que f est* ***continue*** *en x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existe et vaut $f(x_0)$ c'est à dire*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0, \forall x \in D_f,\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Si f est définie ***à droite*** *de x_0, on dit qu'elle est* ***continue à droite*** *de x_0 si*

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0) = l_1$$

Si f est définie ***à gauche*** *de x_0, on dit qu'elle est* ***continue à gauche*** *de x_0 si*

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0) = l_2$$

f est continue en x_0 si et seulement si f est continue à gauche et à droite de x_0 $(l_1 = l_2)$.

Définition 1.24 (Discontinue) *Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ une fonction et soit x_0 un point d'accumulation de D_f tel que $x_0 \in D_f$. On dit que f est* ***discontinue*** *en x_0 si*

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall \delta > 0, \exists x \in D_f,\ 0 < |x - x_0| < \delta \text{ et } |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$$

Remarque 1.7

1) f est ***continue sur*** *$\mathbf{I} \subset D_f$ si f est continue en tout point de I.*

2) Dire que f est continue dans l'intervalle fermé bornée $[a, b]$ c'est dire qu'ell'est continue en tout point de $]a, b[$, continue à droite de a et continue à gauche de b.

Exemple 1.20 *Les fonctions usuels x, $\frac{1}{x}$, $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, e^x, $\ln x$... sont tous continues sur leur ensembles de définitions.*

Exemple 1.21 *Soient a et b deux nombres réels. On définit la fonction*

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \quad &\mapsto \quad f(x) = \begin{cases} b \times e^{ax}, & si\ x \leq 0 \\ \dfrac{1}{1+x}, & si\ x > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Donner une condition sur b pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

En effet, pour $x \neq 0$,

la fonction f est continue car f est une fonction usuels "exponentielle et fraction" continue

Pour $x = 0$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0).$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} b \times e^{ax} = b.$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{1+x} = 1.$$

Ainsi pour que f est continue au point 0 il faut que $b = 1$.

En definitive, f est continue dans $\mathbb{R}$ si est seulement si $b = 1$.

Proposition 5

1) Si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue en x_0 et $g : J \to \mathbb{R}$ est continue en $y_0 = f(x_0)$, alors $g \circ f$ est continue en x_0.

2) Si $f, g : I \to \mathbb{R}$ sont continues en x_0, alors $f+g$ et $f-g$ sont continues en x_0, et si $g(x_0) \neq 0$, alors $\dfrac{f}{g}$ est continue en x_0.

1.3.1 Le prolongement par continuitè

Définition 1.25 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et x_0 un point de I. Soit f une fonction définie sur un intervalle I sauf peut etre en x_0 telle que f admet une limite finie l au point x_0, la fonction F définie sur I par:*

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & si\ x \neq x_0 \\ l\ si\ x = x_0 \end{cases}$$

est continue sur I et elle s'appellele prolongement par continuité de f au point x_0.

Exemple 1.22 *Soit* $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$, *avec* $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

le prolongement par continuété de la fonction f *existe et il est de la forme:*

$$\begin{array}{rcl} F & : & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sin x}{x} \ si \ x \neq 0 \\ 1 \ si \ x = 0 \end{array} \right. . \end{array}$$

Exercice 4 *Les fonctions suivantes sont-elle prolongeable par continuété au point* x_0 *indiqué? Si oui ecrire leur prolongée.*

$$1) \ f(x) = \sin x \cos(\frac{1}{x}), \ (x_0 = 0), \qquad 2) \ g(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}, \ (x_0 = 1)$$

En effet

1) $f(x) = \sin x \cos(1/x)$ *n'est pas définie au point* $x_0 = 0$.

Comme $|\cos(1/x)| \leq 1$, *Donc* $\lim_{x \to 0} \sin x = 0$*; alors* $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$

d'où f *est prolongeable par continuité en* 0 *par* $\tilde{f}(0) = 0$.

Ainsi la fonction F *est continue dans* $\mathbb{R}$

$$F(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \sin x \cos(1/x) & si \ x \neq 0 \\ 0 & si \ x = 0 \end{array} \right.$$

2) $g(x) = \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{2}{1-x^2}$ *n'est pas définie au point* $x_0 = 1$.

$$g(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{(1-x)(1+x)} = \frac{(1+x)-2}{(1-x)(1+x)} = \frac{x-1}{(1-x)(1+x)} = -\frac{1}{1+x},$$

pour $x \neq \pm 1$. *Ainsi* $\lim_{x \to 1} g(x) = -\dfrac{1}{2}$, *prolongement:* $\tilde{g}(1) = -\dfrac{1}{2}$.

d'où g *est prolongeable par continuité en* 1 *par* $g(1) = -\dfrac{1}{2}$.

Ainsi la fonction G est continue dans $\mathbb{R}$

$$G(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} - \frac{2}{(1-x)(1+x)} & si\ x \neq 1 \\ -\dfrac{1}{2} & si\ x = 1 \end{cases}$$

1.3.2 Propriètès sur les fonctions continues

Théorème 1.3

Toute fonction continue sur un intervalle fermé borné $[a,b]$ est bornée dans $[a,b]$.

Montrons que les hypothèses du théorème précédent soit essentielles

Exemple 1.23

1) ***Intervalle fermé, non bornée, f continue***

$$\begin{aligned} f &: [0,+\infty[\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \sqrt{x}. \end{aligned}$$

$[0,+\infty[$ *est fermé mais non bornée, f est continue mais f n'est pas bornée.* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$

2) ***Intervalle bornée, non fermé, f continue***

$$\begin{aligned} f &:]0,1] \to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

$]0,1]$ *est non fermé mais bornée, f est continue dans* $]0,1]$

mais f n'est pas bornée. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty.$

3) ***Intervalle bornée, fermé, f non continue***

$$\begin{aligned} f &: [0,1] \to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\ si\ x \in]0,1] \\ 1\ si\ x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$[0,1]$ *est fermé et bornée, f n'est pas continue en 0 car* $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty.$

Théorème 1.4 *Toute fonction continue sur un intervalle fermé borné* $[a, b]$ *atteint son minimum* $m = \inf\ f\ (x)$ *et son maximum* $M = \max\ f\ (x)$ *pour* $x \in [a, b]$.
Autrement dit atteint au moins une fois toute valeur strictement comprise entre m *et* M.

$$\exists x_1 \in [a, b]\,,\ f(x_1) = \sup_{[a,b]} f(x) = \max_{[a,b]} f(x) = M$$

$$\exists x_2 \in [a, b]\,,\ f(x_2) = \inf_{[a,b]} f(x) = \min_{[a,b]} f(x) = m$$

et on a $f([a, b]) = [m, M]$.

Exemple 1.24 *Soit* $f\colon [0, \pi] \to \mathbb{R}$ *définie par* $f\ (x) = \sin x$.

$$\exists x_1 = \frac{\pi}{2} \in [0, \pi]\,,\quad f(\frac{\pi}{2}) = \sup_{[0,\pi]} f(x) = \max_{[0,\pi]} f(x) = 1.$$

$$\exists x_2 = 0, x_2 = \pi \in [0, \pi]\,,\ f(0) = f(\pi) = \inf_{[0,\pi]} f(x) = \min_{[0,\pi]} f(x) = 0.$$

Théorème 1.5
L'image d'un intervalle I *de* $\mathbb{R}$ *par une fonction* f *continue est un intervalle* $J = f(I)$.

Preuve:
1) On sait que si I est fermé bornée, on a $f(I) = [m, M]$
2) Mais si I est ouvert $f(I)$ n'est pas toujours ouvert. ■

Exemple 1.25
Soit $f\colon \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ *définie par* $f\ (x) = \cos x$, *on a* $f(\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[) =]0, 1]$ *(pas ouvert)*

1.3.3 Théorème des valeurs intermédiaires

Le théorème des valeurs intermédiares est un outil pour résoudre les équations de type: $f\ (x) = 0$

Théorème 1.6 *Soit* f *une fonction continue dans un intervalle* $[a, b]$ *avec* $a, b \in \mathbb{R}$, *telle que:* $f\ (a) \times f\ (b) < 0$, *c'est à dire* $f\ (a)$ *et* $f\ (b)$ *ont deux signes opposés.*
Alors il existe une constante $\alpha \in]a, b[$ *tel que:* $f\ (\alpha) = 0$.
Si de plus f *est strictement monotone alors* α *est unique.*

Théorème 1.7 (Valeurs intermédiaires version 2)

Si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue et $x_1 < x_2 \in I$, alors pour toute valeur c comprise entre $f(x_1)$ et $f(x_2)$, il existe $x_0 \in]x_1, x_2[$ tel que $f(x_0) = c$

Exemple 1.26 *Soit f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \cos\sqrt{x}$.*

Montrons que l'équation: $f(x) = 0$ admet une solution dans $\left]0, \pi^2\right[$.

En effet: $f\left(\pi^2\right) = -1$ et $f(0) = 1 \Rightarrow f\left(\pi^2\right) \times f(0) < 0$ de plus f est continue.

D'après le théorème des valeurs intermédiares, il existe une constante $\alpha \in \left]0, \pi^2\right[$ tel que:

$$f(\alpha) = \cos\sqrt{\alpha} = 0.$$

Remarque 1.8 *On à la même chose si $a = -\infty$ ou $b = +\infty$ sauf au lieu de:*

$$f(a) \times f(b) < 0 \text{ on a: } \left[\lim_{x\to-\infty} f(x)\right] \times \left[\lim_{x\to+\infty} f(x)\right] < 0 \text{ ou bien}$$
$$\left[\lim_{x\to-\infty} f(x)\right] \times < 0 \text{ , ou bien } a \times \left[\lim_{x\to+\infty} f(x)\right] < 0.$$

par suite on trouve le même résultat.

Exemple 1.27

1) A l'aide d'une version du théorème des valeurs intermédiaires, montrer que la on f définie dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^9 + x^3 + 2$ admet au moins une racine réelle.

2) Cette racine est-elle unique? Justifier.

3) Montrer que l'équation "$x + e^x = 1$", admet une solution et préciser l'intervalle. ***(supp)***

En effet

$f(x) = x^9 + x + 2$. f est polynomiale, donc continue et dérivable; $f'(x) = 9x^8 + 1 > 0$ pour tout x, donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Par le théorème des valeurs intermèdiaires, f s'annule au moins une fois;

De plus par la stricte monotonie, la racine réelle est unique.

Théorème 1.8 (de la fonction inverse)

Si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue et (strictement monotone=injective), alors

1) $J = f(I)$ est un intervalle dont les bornes sont les limites de f en ces bornes de I.

2) $f : I \to \underbrace{J = f(I)}_{surjective}$ est bijective de I dans J.

3) La fonction inverse $f^{-1} : J \to I$ existe, est continue, strictement monotone.

Exemple 1.28 *Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+*}$, $x \mapsto f(x) = e^x$.*

f est continue et croissante, alors

1) $I = \mathbb{R}$, $J = f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{+*} =]0, +\infty[$ est un intervalle.

2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+*}$ est bijective.

3) La fonction inverse $f^{-1} : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ existe, est continue, strictement croissante.

la fonction réciproque de e^x est notée $\ln x$

$$\begin{aligned} f^{-1} \quad &: \quad \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R} \\ y \quad &\mapsto \quad x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow f(y) = x \Leftrightarrow \ln y = x. \end{aligned}$$

Le graphe $\varphi(f^{-1}) = \{(y, f^{-1}(y)), y \in \mathbb{R}\}$, ainsi que $\varphi(f) = \{(x, f(x)), x \in \mathbb{R}^{+*}\}$ sont symétrique par rapport a la premiere bissectrice d'equation $x = y$.

Définition 1.26

f est Lipschitzienne sur I s'il existe une constante $k \geq 0$ telque pour tout $x, y \in I$.

$$|f(x) - f(y)| \leq k\,|x - y|\,.$$

Exemple 1.29

1) La fonction $x \to f(x) = ax + b, b \neq 0$ est Lipschitzienne car, soit $x, y \in \mathbb{R}$.

$$|f(x) - f(y)| = |ax + b - (ay + b)| = |a|\,|x - y)| = k\,|x - y)|\,, k = |a|$$

2) La fonction $g(x) = x^2$ est Lipschitzienne sur tout intervalle $[-c, c]$ avec $c > 0$ car

$$|g(x) - g(y)| = |x^2 - y^2| = |x + y||x - y| \leq 2c|x - y|.$$

Définition 1.27 *f est uniformément continue sur I si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ telque pour tout $x, y \in I$.*

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Proposition 6 *Si f est Lipschitzienne sur I, alors f est uniformément continue sur I.*

Preuve: Pour $\varepsilon > 0$, choisissons $\delta = \dfrac{\varepsilon}{k+1}$. Si $|x - y| < \delta$, alors

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y| < k\delta = k\frac{\varepsilon}{k+1} < \varepsilon.$$

■

Exemple 1.30

1) La fonction $x \to f(x) = ax + b, b \neq 0$.

Soit $x, y \in \mathbb{R}$.

$$|f(x) - f(y)| = |ax + b - (ay + b)| = |a|\,|x - y)| = k\,|x - y)|\,, k = |a|$$

2) La fonction $g(x) = x^2$ est Lipschitzienne sur tout intervalle $[-c, c]$ avec $c > 0$ car

$$|g(x) - g(y)| = |x^2 - y^2| = |x + y||x - y| \leq 2c|x - y|.$$

Remarque 1.9 *Les fonctions affines sont uniformément continues sur $\mathbb{R}$, et g est uniformément continue sur tout $[-c, c]$.*

Hiârchie

$$\text{Lipschitz} \;\Rightarrow\; \text{uniformément continue} \;\Rightarrow\; \text{continue.}$$

Les réciproques sont fausses.

- $f(x) = x^2$: continue mais pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
- $f(x) = \sqrt{x}$ sur $[0, 1]$: uniformément continue mais pas Lipschitz.

Théorème 1.9 (Cas particulier) *Toute fonction* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *est continue sur un intervalle fermé et borné* ($[a, b]$) *est uniformément continue sur* $[a, b]$

Exemple 1.31 $f(x) = x^2$ *est uniformément continue sur* $[-5, 5]$*, mais ne l'est pas sur* $\mathbb{R}$.

Exercice 5 *Montrer que la fonction* f *définie par* $f(x) = x^2$ *est uniformément continue sur* $]0; 1]$.

Méthode 1

"la fonction f *définie par* $f(x) = x^2$ *est uniformément continue sur* $]0; 1]$ *si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0;\ \forall x, y \in]0, 1],\ \text{on a } |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

"Sur $]0, 1]$*, on a*

$$|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |x - y||x + y| \leq 2|x - y|,$$

Il suffit donc de prendre $\delta < \frac{\varepsilon}{2}$ *pour avoir* $|x - y| < \delta \Rightarrow |x^2 - y^2| < \varepsilon$.
Finalement,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta = \frac{\varepsilon}{2} > 0;\ \forall x, y \in]0, 1],\ \text{on a } |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Méthode 2

"Si f est k-Lipschitzienne sur $]0; 1]$ *alors* f *est uniformément continue sur I".*
On a

$$\forall x_1, x_2 \in]0, 1] \quad |f(x_1) - f(x_2)| = |x_1^2 - x_2^2| = |x_1 - x_2||x_1 + x_2| \leq 2|x_1 - x_2|,$$

Ainsi f est 2-Lipschitzienne sur $]0; 1]$ *alors* f *est uniformément continue sur I.*

1.4 Dèrivation

Définition 1.28 *Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, x_0 un point de I, et une fonction $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f* ***est dérivable en*** *x_0, s'il existe un nombre réel unique α tel que:*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \alpha$$

α est appelé dérivée de f au point x_0 est noté $f'(x_0)$.

La fonction est dérivable dans tout l'intervalle I quand elle est dérivable en tout point x_0 de I.

D'autre part si on pose: $x - x_0 = h$ alors on a:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \alpha$$

Remarque 1.10

Le nombre α est l'angle que fait la droite tangente au point x_0 avec le graphe de la fonction f.

Exemple 1.32

1) ***Dérivées par définition.***

$f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h\, x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}.$$

$f(x) = \sqrt{x}$, $x > 0$:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$f(x) = x^3$:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} = 3x^2.$$

2) ***Dérivées n-ièmes.***

$f(x) = e^{ax}$: $f^{(n)}(x) = a^n e^{ax}$.

$f(x) = \frac{1}{1-x}$: *par récurrence,*

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}, \quad \ldots \quad f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}.$$

$f(x) = (1+2x)^n$ (avec $n \in \mathbb{N}$ fixé):

$$f^{(k)}(x) = 2^k\, n(n-1)\cdots(n-k+1)\,(1+2x)^{n-k} = 2^k\, \frac{n!}{(n-k)!}\,(1+2x)^{n-k}, \quad 0 \le k \le n,$$

et $f^{(k)}(x) = 0$ pour $k > n$.

Proposition 7

1) Si f n'est pas continue en un point x_0, alors elle n'est pas dérivable en ce point.

2) Si f est dérivable en $x_0 \in I \Rightarrow f$ est continue en $x_0 \in I$.

Proposition 8 *Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable en point x_0 si et seulement si elle admet en ce point des dérivées à droite*

$$\exists \alpha \in \mathbb{R},\quad \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \alpha = f'_g(x_0)$$

et des dérivées à gauche

$$\exists \beta \in \mathbb{R},\quad \lim_{x \to x_0^-} \frac{f\ \ (x) - f\ \ (x_0)}{x - x_0} = \beta = f'_d(x_0).$$

et

$$f'_d(x_0) = f'_g(x_0) \text{ on note } f'(x_0)$$

Exemple 1.33 *Soit*

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \\ x \quad &\mapsto \quad f(x) = |x| = \begin{cases} x \text{ si } x \ge 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

il est clair que f est continue au point 0, de plus

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1 = f'_g(0)$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x}{x} = 1 = f'_d(0)$$

donc la fonction f n'est pas dérivable en 0.

Exercice 6 *Soit a et b deux nombres réels. On définit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par*

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} x + \dfrac{\sqrt{x^2}}{x}, & si\ x < 0 \\ a & si\ x = 0 \\ b\ \dfrac{\sin(5x)}{x}, & si\ x > 0 \end{cases}$$

1) Déterminer a et b pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

2) Déterminer a et b tels que f soit dérivable sur $\mathbb{R}$.

Solution

Remarquons que $\sqrt{x^2} = |x|$.

1) Continuité en 0. *Pour $x < 0$, $|x| = -x$, donc $f(x) = x + \dfrac{-x}{x} = x - 1$ et*

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1.$$

Pour $x > 0$,

$$\lim_{x \to 0^+} b\,\frac{\sin(5x)}{x} = b \cdot \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin(5x)}{5x} \cdot 5 = 5b.$$

La continuité en 0 impose

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$$

$$a = -1 = 5b \quad \Rightarrow \quad a = -1, \quad b = -\frac{1}{5}.$$

2) Dérivabilité en 0.

Pour etudier la derivabilité en suppose d' abord que la fonction f est continue c-àd

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} x + \dfrac{\sqrt{x^2}}{x}, & si\ x < 0 \\ -1 & si\ x = 0 \\ -\frac{1}{5}\ \dfrac{\sin(5x)}{x}, & si\ x > 0 \end{cases}$$

Pour $x < 0$, $f(x) = x - 1 \Rightarrow f'(x) = 1$, donc le taux d'accroissement donne

$$f'_g(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{(x-1) - (-1)}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x}{x} = 1.$$

Pour $x > 0$, avec $a = 5b$, on étudie

$$f_d'(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{-\frac{1}{5}\frac{\sin(5x)}{x} - (-1)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-\frac{1}{5}\frac{\sin(5x)}{x} + 1}{x} = -\frac{1}{5}\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{\frac{\sin(5x)}{x} - 5}{x} \right) = 0$$

Comme $f_g'(0) = 1 \neq 0 = f_d'(0)$, alors f n'est pas dérivable en 0.

1.4.1 Quelques propriétés sur les fonctions dérivables

Proposition 9 *Etant donnés un intervalle I et deux fonctions $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ dérivables en un point x_0 de I, alors:*

1) $f + g$ est dérivable en x_0 et $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

2) $a \times f$ est dérivable en x_0 et $(a \times f)'(x_0) = a \times f'(x_0), \forall a \in \mathbb{R}$.

3) $f \times g$ est dérivable en x_0 et $(f \times g)'(x_0) = (f'(x_0) \times g(x_0)) + (f(x_0) \times g'(x_0))$.

4) Si $g(x_0) \neq 0$, donc $\frac{f}{g}$ est dérivable en x_0 et $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$.

1.4.2 Dérivée d'une fonction composée

Proposition 10 (Regle de la chaine) *Soient $u : I \to J$ et $v : J \to \mathbb{R}$ et x_0 un point de I. Si la fonction u est dérivable en $x_0 \in I$ et si V est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ alors $v \circ u$ est dérivable en x_0 et on a:*

$$(v \circ u)'(x_0) = u'(x_0) \times \left[v'(u(x_0))\right]$$

Exemple 1.34

$$\begin{array}{ll} v : \mathbb{R} \to \mathbb{R} & u : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ y \mapsto v(y) = \sin y & x \mapsto u(x) = 3x \end{array}$$

u est dérivable sur $\mathbb{R}$ ainsi $u'(x_0) = 3$

de plus

$$\begin{aligned} \frac{\sin y - \sin y_0}{y - y_0} &= 2\frac{\sin\left(\frac{y-y_0}{2}\right)\cos\left(\frac{y+y_0}{2}\right)}{y - y_0} \\ &= \frac{\sin\left(\frac{y-y_0}{2}\right)}{\left(\frac{y-y_0}{2}\right)} \times \cos\left(\frac{y+y_0}{2}\right) \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\lim_{y\to y_0}\frac{\sin y-\sin y_0}{y-y_0} &= \lim_{y\to y_0}\frac{\sin\left(\frac{y-y_0}{2}\right)}{\left(\frac{y-y_0}{2}\right)}\times\cos\left(\frac{y+y_0}{2}\right)\\
&= 1\times\cos\left(\frac{y_0+y_0}{2}\right)\\
&= \cos y_0\ ,\ \textit{car: } \lim_{y\to y_0}\frac{\sin\left(\frac{y-y_0}{2}\right)}{\left(\frac{y-y_0}{2}\right)}=1
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
(v\circ u)'(x_0) &= u'(x_0)\times\left[v'(u(x_0))\right]\\
&= 3\left[\cos 3x_0\right]
\end{aligned}$$

1.4.3 Dérivée d'une fonction réciproque

Proposition 11 *Soient $f : I \to J$ une fonction bijective, x_0 un élément de I et $y_0 = f(x_0)$ l'élément de J. Pour que f^{-1} est dérivable en y_0 il faut et il suffit que:*
f est dérivable en x_0, $f'(x_0)$ non nul et f^{-1} est continue en y_0. Alors:

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}=\frac{1}{\left(f'\circ f^{-1}\right)(y_0)}$$

Exemple 1.35 *On note la fonction réciproque de* $\sin x$ *par* $\arcsin x$ *alors la dérivée de est:*

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Remarque 1.11 *Toujours on donne le résultat en fonction de la première variable de la fonction réciproque donnée.*

1.4.4 Dérivées d'ordre supérieure

Soit f une fonction n-fois dérivable dans $I\subset\mathbb{R}$. On note les dérivées d'ordre supérieure d'une fonction f par: $f^{(n)} : I\to\mathbb{R}$ vérifiant:

i) $f^{(0)}=f$.

ii) $f^{(k+1)}=\left(f^{(k)}\right)'$, pour tout $k=0,1,...,n-1$.

Exemple 1.36 *Calculer puis montrer les dérivées n-iemmes des fonctions*

$$e^{ax}, \qquad \frac{1}{1-x}, \qquad (1+2x)^n, \qquad x^2 \sin x \ \textit{(supp)}$$

1.4.5 Fonction de classe C^n

Définition 1.29 *Soit* $f : I \to \mathbb{R}$*, est dite*

1) de classe C^0*, si* f *est une fonction continue et on écrit* f *est de classe* $C(I)$*,*

c'est les fonctions continues dans un intervalle I*.*

2) de classe C^1*, si* f *est une fonction continuiment dérivable c-à-d* f *est dérivable et* f' *continue.*

3) de classe C^2*, si* f *est une fonction deux fois dérivables et* f'' *continue.*

Proposition 12

1) Une fonction de classe C^n*, est une fonction continue et admet des dérivées continues jusqu'à l'ordre n. Et on dit également que* f *est n fois continûement dérivable.*

2)Une fonction de classe C^∞*, est une fonction indéfiniment dérivable.*

Nous alons envisager ici la méthode pratique pour étudier la classe d'une fonction.

1) Si $n = 1$ (fonction de classe $C^1(I)$):

Une fonction de classe $C^1(I)$ est une fonction continue et la première dérivée de cette fonction **existe** et **continue** en tout point de I**.**

a) Existence

Pour étudier l'existence de la première dérivée on utilise la définition de la dérivée en tout point x_0 de I ç'est à dire on calcul:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \alpha$$

Alors on les cas suivants:

i) Si $\alpha = \pm\infty$ ou bien α est égale deux limites ou plus ou bien la limite à gauche est différente à la limite à droite, alors la limite n'existe pas et donc la fonction n'est pas de classe C^1.

ii) Si α est égale à une constante unique alors la limite existe et on passe à l'étude de la continuété de la dérivée.

b) Continuété de la première dérivée

Pour étudier la continuété de la première dérivée en x_0 on calcul $f'(x)$ ensuite on calcul:,

$$\lim_{x \to x_0} f'(x) = \beta \text{ alors si } \beta \neq \alpha$$

Donc la première dérivée n'est pas continue ce qui permet de dire que f n'est pas de classe C^1. Par contre si:

$$\beta = \alpha$$

Alors la première dérivée est continue ce qui permet de dire que f est de classe C^1.

3) Si $n = 2$ (fonction de classe $C^2(I)$):

Une fonction de classe $C^2(I)$ est une fonction telle que ça dérivée est de classe $C^1(I)$. Donc on fait le même travail que le deuxième cas mais on utilise f' au lieu de f.

Remarque 1.12 *Si f n'est pas de classe $C^n(I)$, alors elle n'est pas de classe $C^k(I)$, $\forall k \geq n+1$.*

$$C^0(I) \subset C^1(I) \subset ... \subset C^{n-1}(I) \subset C^n(I).$$

Exemple 1.37 *Soit la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par:*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$$

La fonction f est elle de classe $C^n(\mathbb{R})$?

En effet

1) La continuité dans $\mathbb{R}$

a) La fonction est continue dans $\mathbb{R}^*$ car f est le produit de deux fonctions usuelles continue.

b) En $x = 0$, on a:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} x^2 \sin \frac{1}{x} &= 0 \ car \ \lim_{x \to 0} x^2 = 0 \ et \ \sin \frac{1}{x} \ est\ born\acute{e}e. \\ &= f(0). \end{aligned}$$

Donc f est continue dans $\mathbb{R}$.

2) f est elle de classe C^1?

La fonction f est dérivable dans $\mathbb{R}^*$, mais le seul problème est le point 0.

i) Existence de la 1ère dérivée en 0?

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0\Rightarrow \text{ existe.}$$

ii) La continuété de la 1ère dérivée en 0?

$f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}f'(x)$ *n'existe pas, donc la 1ère dérivée n'est pas continue en 0.*

Conclusion: *f n'est pas de classe C^1.*

Définition 1.30 (Formule de Leibnitz) *Soit f et g de fonctions de classe C^n dans I, alors $f\times g$ est de classe C^n dans I, et*

$$(f\times g)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k f^{(k)}g^{(n-k)};\ C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Exemple 1.38 *$f(x)=x^2\sin x$: par la formule de Leibniz,*

$$(x^2\sin x)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(x^2)^{(k)}(\sin x)^{(n-k)}.$$

Or $(x^2)^{(0)}=x^2$, $(x^2)^{(1)}=2x$, $(x^2)^{(2)}=2$, $(x^2)^{(k)}=0$ pour $k\geq 3$, et $(\sin x)^{(m)}=\sin\big(x+m\frac{\pi}{2}\big)$. D'où

$$(x^2\sin x)^{(n)}=x^2\sin\Big(x+n\frac{\pi}{2}\Big)+2n\,x\cos\Big(x+(n-1)\frac{\pi}{2}\Big)+n(n-1)\sin\Big(x+(n-2)\frac{\pi}{2}\Big).$$

1.4.6 Extrema d'une fonction à l'aide de la dérivée

Définition 1.31 *Soit $f\colon I\to\mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle $I\subset\mathbb{R}$.*

1) On dit que f admet un maximum absolu (ou global) en $c\in I$ si

$$\forall x\in I,\ f(x)\leq f(c).$$

2) On dit que f admet un minimum absolu en $c \in I$ si

$$\forall x \in I,\ f(x) \geq f(c).$$

3) Un extremum local (ou relatif) en c signifie qu'il existe un voisinage U de c dans I tel que :

$$\forall x \in U,\ f(x) \leq f(c) \quad (\textit{maximum local}) \quad \textit{ou} \quad \forall x \in U,\ f(x) \geq f(c) \quad (\textit{minimum local}).$$

Théorème 1.10 *Si f est différentiable en $c \in I$ et que f admet un extremum local en c, alors $f'(c) = 0$ (le point c est appelé point critique).*

Remarque 1.13 *La réciproque du théorème est fausse.*

Exemple 1.39 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) = x^3$
$f'(x) = 3x^2$ *et* $f'(0) = 0$, *mais f n'admet pas d'extremum local en* 0.

Tests suffisants (premier et second dérivée)

Test de la première dérivée.
Soit f une fonction différentiable sur un intervalle contenant c, et que $f'(c) = 0$ et

- Si f' change de signe de positif à négatif en c, alors f admet un maximum local en c.
- Si f' change de signe de négatif à positif en c, alors f admet un minimum local en c.

Test de la seconde dérivée.
Soit f une fonction deux fois différentiable en c et $f'(c) = 0$, alors :

- Si $f''(c) > 0$, alors f admet un minimum local en c,
- Si $f''(c) < 0$, alors f admet un maximum local en c
- Si $f''(c) = 0$.

Exemple 1.40 *Considérons la fonction*

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

étape 1. *On calcule* $f'(x) = 3x(x-2)$. *Les points critiques sont* $x = 0$ *et* $x = 2$.

étape 2. *étude du signe de* $f'(x)$:

$$\begin{cases} x < 0 & \Rightarrow x(x-2) > 0 \ \Rightarrow f'(x) > 0, \\ 0 < x < 2 & \Rightarrow x > 0 \ et \ (x-2) < 0 \ \Rightarrow f'(x) < 0, \\ x > 2 & \Rightarrow x > 0 \ et \ (x-2) > 0 \ \Rightarrow f'(x) > 0. \end{cases}$$

Conclusion :

En $x = 0$, f' *passe de* > 0 *à* < 0 *donc* f *admet un maximum local en* 0.

En $x = 2$, f' *passe de* < 0 *à* > 0 *donc* f *admet un minimum local en* 2.

étape 3. *Valeurs à :*

$$f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 2 = 2, \quad f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 2 = 8 - 12 + 2 = -2.$$

Donc f *atteint un maximum local de 2 en 0, et un minimum local de -2 en 2.*

1.4.7 Thèorème de Rolle

Théorème 1.11 *Soit* f *une fonction continue sur un intervalle* $[a, b]$, *dérivable sur* $]a, b[$ *et telle que:* $f(a) = f(b)$. *Alors il existe une constante* $c \in \,]a, b[$ *telle que:* $f'(c) = 0$.

Exemple 1.41

1) Pour montrer que l'équation $\sin x + \cos x = 0$, *admet au moins une solution dans l'intervalle* $]0, \pi[$. *On utilise la fonction* $f(x) = e^x \sin x - 1$ *qui est continue dans* $[0, \pi]$, *dérivable dans* $]0, \pi[$ *et* $f(0) = f(\pi) = -1$.

Donc d'après le théorème de Rolle $\exists c \in \,]0, \pi[$ *telle que:*

$$f'(c) = 0 \Rightarrow e^c \sin c + e^c \cos c = 0 \Rightarrow \sin c + \cos c = 0.$$

2)) Vérifier que les hypothèses du théorème de Rolle s'appliquent a la

fonction $f(x) = x^3 - x$ *pour* $-1 \leq x \leq 1$, *puis trouver le point c qui satisfait la conclusion du théorème.*

b) Faire de meme pour $g(x) = \cos(2x)$ *pour* $0 \leq x \leq 2\pi$

c) Pour quoi le théorème de Rolle ne s'appliquent pas a la fonction
$h(x) = (x-1)^{-2}$ *pour* $0 \leq x \leq 2$.

En effet

a) $f(x) = x^3 - x$ *sur* $[-1,1]$. f *est continue et dérivable et* $f(-1) = f(1) = 0$. *Donc* $\exists c \in (-1,1)$ *tel que* $f'(c) = 0$. *Or* $f'^2 - 1$, *donc* $3c^2 - 1 = 0 \Rightarrow c = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.

b) $g(x) = \cos(2x)$ *sur* $[0, 2\pi]$. *Continue et dérivable, et* $g(0) = g(2\pi) = 1$. $g'(x) = -2\sin(2x)$; $g'(c) = 0 \iff \sin(2c) = 0 \iff 2c = k\pi$. *Sur* $(0, 2\pi)$, $c \in \{\pi/2, \pi, 3\pi/2\}$.

c) Par contre $h(x) = (x-1)^{-2}$ *sur* $[0,2]$. h *n'est pas continue sur* $[0,2]$ *(car* h *n'est pas définie en* $x = 1$*), les hypothèses de Rolle ne sont pas satisfaites.*

1.4.8 Thèorème des accroissement finis

Théorème 1.12 *Soit* f *une fonction continue sur un intervalle* $[a,b]$, *dérivable sur* $]a,b[$. *Alors il existe une constante* $c \in \ ]a,b[$ *tel que:*

$$f(b) - f(a) = (b-a) f'(c).$$

Exemple 1.42 *Montrons l'inégalité suivante:*

$$\forall x \in \ ]0,1[\,, \ \arcsin x < \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \ .$$

En effet

On applique le théorème des accroissements finis sur la fonction $\arcsin x$ *dans* $[0,x] \subset [0,1]$. *Alors il existe une constante* $c \in \ ]0,x[$ *tel que:*

$$\begin{aligned} f(x) - f(0) &= (x-0) f'(c)\,,\ f'(c) = \frac{1}{\sqrt{1-c^2}}. \\ \textit{Mais} &: \frac{1}{\sqrt{1-c^2}} < \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \textit{car: } c < x. \\ &\Rightarrow \arcsin x < \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}$$

1.4.9 Thèorème de l'Hopital

La règle de L'Hopital est un outil fondamental pour le calcul de limites lorsqu'on rencontre des formes indéterminées de type $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$. Elle permet de transformer une limite difficile en une limite plus simple en utilisant les dérivées des fonctions concernées.

Théorème 1.13 *Soient f et g deux fonctions dérivables au voisinage de $x_0 \in \left]a, b\right[$.*
Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ et $\lim_{x\to x_0} g(x) = B$ où A, B sont tous les deux nuls ou tous les deux infinis, $g'(x) \neq 0$ pour x voisin de x_0, et si $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe alors:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Remarque 1.14
1) La regle ne s'applique que dans les cas $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$.
2) Il est parfois nécessaire de l'appliquer plusieurs fois.
3) Elle ne garantit pas toujours l'existence de la limite : il faut vérifier les conditions.

Exemple 1.43
1)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}.$$

Forme $\frac{0}{0}$. On applique L'Hopital :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$$

2)

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}.$$

Forme $\frac{0}{0}$. On applique L'Hopital une première fois :

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x}.$$

Encore $\frac{0}{0}$, on applique une deuxiÃ¨me fois :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2} = \tfrac{1}{2}.$$

3)

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x}.$$

Forme $\frac{\infty}{\infty}$. On applique L'Hopital :

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1/x}{1} = 0.$$

Exercice 7 *Calculer*

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}, \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{e^x}. \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x}, \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}.$$