

Chapitre 1

Suites numériques

1.1 Modes de définition d'une suite

1.1.1 Définition formelle

Définition 1.1 Une suite est une *fonction* de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$, $n \mapsto u_n$.

Exemple 1.1 $u_n = \frac{1}{n^2+1}$, $u_n = \sin n$, $u_{n+1} = 3u_n - 1$, $u_0 = 2$

1.1.2 Définition explicite

Le terme u_n est donnée directement par une formule de type $u_n = f(n)$.

1.1.3 Définition par récurrence

C'est une suite qui est définie par une relation entre ces termes d'ordre $n, n-1, n+1, \dots$ de la forme $\{u_0 = \alpha \text{ et } u_{n+1} = f(u_n)\}$, où f est une fonction de la variable réelle.

Exemple 1.2 Soit u_n la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{u_n + 2}$.

1.2 Monotonie d'une suite

Pour étudier la monotonie d'une suite on calcul la valeur suivante: $u_{n+1} - u_n$ ou bien $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, selon la suite.

Donc, on a les cas suivants:

- 1) si $u_{n+1} \geq u_n, \forall n \in \mathbb{N}$ alors la suite est dite **croissante**.
- 2) si $u_{n+1} > u_n, \forall n \in \mathbb{N}$ alors la suite est dite **strictement croissante**.
- 3) si $u_{n+1} \leq u_n, \forall n \in \mathbb{N}$ alors la suite est dite **décroissante**.
- 4) si $u_{n+1} < u_n, \forall n \in \mathbb{N}$ alors la suite est dite **strictement décroissante**.
- 5) si $u_{n+1} = u_n, \forall n \in \mathbb{N}$ alors la suite est dite **constante**.

Exemple 1.3 *Etudier la monotonie des suites suivantes*

$$u_n = n^2, \quad v_n = -3\sqrt{n} + 1, \quad w_n = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

Que peut on dire de la suite w_n .

1.3 Suites bornées

- Une suite (u_n) est **majorée** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$.
- Une suite (u_n) est **minorée** s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, m \leq u_n$.
- Une suite (u_n) est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée, c-à-d s'il existe $M, m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, m \leq u_n \leq M$.

Exemple 1.4

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n} \end{cases}$$

Montrons par récurrence que: $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > 1$,

En effet: pour $n = 0$, on a: $u_0 = 2 > 1$.

Supposons que: $u_n > 1$ pour un n fixé et montrons que: $u_{n+1} > 1$.

on a: $u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n} > 2 - 1 = 1$.

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 1$ c'est à dire (u_n) est minorée par 1.

1.4 Suites particulières

1.4.1 Suites arithmétique

Définition 1.2 On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique si on passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours le même nombre réel r , on a donc $u_{n+1} = u_n + r$, le réel r est appelé raison de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exemple 1.5

- 1) La suite 1, 6, 11, 16, 21, est une suite arithmétique de raison 5.
- 2) La suite $u_n = 3n - 2$ est arithmétique de raison 3 et de terme initial $u_0 = -2$.

Théorème 1.1 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r ,

-Si $r > 0$, alors la suite est croissante.

-Si $r < 0$, alors la suite est décroissante.

Expression du terme général u_n en fonction de n

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r , alors on a

$$u_1 = u_0 + r$$

$$u_2 = u_1 + r = u_0 + 2r$$

$$u_3 = u_2 + r = u_0 + 3r.$$

.

.

$$u_n = u_0 + nr.$$

Remarque 1.1 Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison r , et si n et p sont deux entiers naturels, alors on a: $u_n = u_p + (n - p) \times r$

Somme de trois termes consécutifs

Soit a, b, c trois termes consécutifs d'une suite arithmétique alors $a + c = 2 \times b$.

L'expression de la somme des $(n+1)$ termes consécutifs

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison r , on note S_n la somme des $(n+1)$ termes de la suite u_n

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{(n+1)}{2}(u_0 + u_n)$$

Remarque 1.2 *Somme de $(n - p + 1)$ termes consécutifs d'une suite arithmétique.*

Soit $S_n = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_n$. alors

$$S_n = \frac{(n - p + 1)}{2}(u_p + u_n)$$

1.4.2 Suites géométrique

Définition 1.3 *On dit qu'une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique, si on passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par le même nombre réel q , on a donc $v_{n+1} = v_n \times q$, le réel q est appelé raison de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.*

Exemple 1.6

- 1) La suite $1, 2, 4, 8, 16, \dots$ est une suite géométrique de raison 2.
- 2) La suite $v_n = 3^n$ est géométrique de raison 3 et de terme initial $v_0 = 3^0 = 1$.

Théorème 1.2 *Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison q*

-Si $q > 0$, alors la suite est croissante.

-Si $0 < q < 1$, alors la suite est décroissante.

Exprèssion du terme général v_n en fonction de n

Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q , alors on a

$$v_1 = v_0 \times q$$

$$v_2 = v_1 \times q = v_0 \times q^2$$

$$v_3 = v_2 \times q = v_0 \times q^3.$$

.

.

$$v_n = v_0 \times q^n.$$

Remarque 1.3 Si $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q , et si n et p sont deux entiers naturels, alors on a $v_n = v_p \times q^{(n-p)}$

Somme de trois termes consécutifs

Soit a, b, c trois termes consécutifs d'une suite arithmétique alors $a + c = 2b$.

L'expression de la somme des $(n+1)$ termes consécutifs

Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q , on note S_n la somme des $(n+1)$ termes de la suite v_n

$$S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n = v_0 \times \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right), q \neq 1$$

Remarque 1.4 Somme de $(n - p + 1)$ termes consécutifs d'une suite géométrique.

Soit $S_n = v_p + v_{p+1} + v_{p+2} + \dots + v_n$. alors

$$S_n = v_p \times \left(\frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q} \right), q \neq 1$$

1.5 Lemmes fondamentales de convergence des suites

1.5.1 Lemme de la limite d'une suite

Définition 1.4

Une suite (u_n) est dite **convergente** si sa limite l existe et elle est égale à une constante unique.

Exemple 1.7 Dans chaque cas, trouver $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$, où

$$u_n = q^n, \quad q \in \mathbb{R}, \quad u_n = 1 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}$$

I) On discute suivant les valeurs de q , on a

1) Si $q = 0$ alors $q^n = 0$, d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$.

2) Si $0 < |q| < 1$, on écrit $|q|^n = e^{n \ln |q|}$, puisque $0 < |q| < 1$, alors $\ln |q| < 0$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln |q| = -\infty$, donnant $e^{n \ln |q|} \rightarrow 0$.

Ainsi $|q|^n \rightarrow 0$, et donc $q^n \rightarrow 0$.

3) Si $|q| > 1$.

a) Si $q > 1$ alors $\ln q > 0$ d'où $q^n = e^{n \ln q} \rightarrow +\infty$

b) Si $q < -1$ alors la limite n'existe pas.

4) Si $q = 1$ alors $q^n = 1$, ainsi $q^n \rightarrow 1$

5) Si $q = -1$ alors $q^n = (-1)^n$, ainsi q^n n'a pas de limite.

II)

$$1 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1 - (\frac{1}{2})^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} \right) \rightarrow 2, \quad \text{car } |q| = \left| \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2} < 1.$$

Définition 1 (Convergence) La suite (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq n_0, |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

On écrit alors $u_n \rightarrow \ell$ ou $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \ell$.

Autrement dit :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq n_0, l - \varepsilon < u_n < l + \varepsilon.$$

Exemple 1.8 Suite harmonique inverse : $u_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Soit en effet $\varepsilon > 0$, on cherche un entier n_0 tel que $n \geq n_0$ et $|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$

$$|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow 0 - \varepsilon < \frac{1}{n} < 0 + \varepsilon \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$$

On peut poser $n_0 = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$ pour que $n \geq n_0$ et $|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$.

Remarque 1.5

1) L'entier n_0 dépend de ε et n'est pas unique.

2) Si (u_n) converge, toute suite $(u_{n+k})_{n \geq n_1}$ avec $n_1 \geq n_0$ converge vers la même limite.

Théorème 1.3 (Unicité de la limite) Si une suite converge, alors sa limite est unique.

Preuve: Supposons que (u_n) converge à la fois vers l et l' , avec $l \neq l'$. Sans perte de généralité, supposons $l > l'$ et posons $\varepsilon = \frac{l-l'}{2} > 0$.

D'après la définition de la limite, il existe n_0 et n_1 tels que :

$$\forall n \geq n_0, |u_n - l| < \varepsilon, \quad \forall n \geq n_1, |u_n - l'| < \varepsilon.$$

Pour $n \geq \max(n_0, n_1)$, on a alors :

$$u_n > l - \varepsilon = \frac{l + l'}{2} \quad \text{et} \quad u_n < l' + \varepsilon = \frac{l + l'}{2},$$

ce qui est impossible. D'où $l = l'$. ■

1.3.1.1 Propriétés fondamentales

Théorème 1.4 Toute suite convergente est bornée.

Preuve: Soit (u_n) une suite convergente de limite l .

Prenons $\varepsilon = 1$. Il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $|u_n - l| < 1$, donc :

$$l - 1 < u_n < l + 1.$$

Pour les termes $u_0, \dots, u_{n_0-1}$, on a

$$u_k \leq u_k \leq u_k, \quad k \in [0, n_0 - 1]$$

Notons :

$$\alpha = \min(l - 1, u_0, \dots, u_{n_0-1}), \quad \beta = \max(l + 1, u_0, \dots, u_{n_0-1}).$$

Alors pour tout n , $\alpha \leq u_n \leq \beta$, donc (u_n) est bornée. ■

Remarque 1.6

1) *L'inverse est faux : une suite bornée n'est pas nécessairement convergente (exemple : $u_n = (-1)^n$).*

2) *Si une suite n'est pas bornée, elle diverge.*

Théorème 1.5 Soient (u_n) et (v_n) deux suites, on a:

1. Si (u_n) converge vers l alors $|(u_n)|$ converge vers $|l|$.
2. Si $|(u_n)|$ converge vers 0 alors (u_n) converge vers 0.
3. Si (u_n) converge vers 0 et (v_n) est bornée alors $(u_n \times v_n)$ converge vers 0.

Preuve:

1) On suppose (u_n) converge vers l et montrons que $|(u_n)|$ converge vers $|l|$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq n_0, |u_n - l| < \varepsilon.$$

$$\text{Comme } ||u_n| - |l|| \leq |u_n - l|.$$

On a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq n_0, ||u_n| - |l|| < \varepsilon.$$

d'où le résultat.

2) On suppose que $|(u_n)|$ converge vers 0 et montrons que (u_n) converge vers 0.

$$|(u_n)| \text{ converge vers } 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq n_0, ||u_n| - 0| < \varepsilon.$$

Comme $||u_n|| = |u_n|$.

On a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq n_0, |u_n| < \varepsilon.$$

d'où (u_n) converge vers 0.

3) On suppose que (u_n) converge vers 0 et (v_n) est bornée et montrons que $(u_n \times v_n)$ converge vers 0.

$$(u_n) \text{ converge vers } 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq n_0, |u_n| < \varepsilon.$$

$$(v_n) \text{ est bornée} \Leftrightarrow \exists M > 0; |v_n| \leq M.$$

$$(u_n \times v_n) \text{ converge vers } 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq n_0 \Rightarrow |u_n v_n| < \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon > 0$, on cherche un entier naturel n_0 qui vérifie

$$\forall n \geq n_0 \Rightarrow |u_n v_n| < \varepsilon.$$

$$(v_n) \text{ est bornée} \Leftrightarrow \exists M > 0; |v_n| \leq M.$$

Pour $\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{M} > 0$, on a

$$|u_n v_n| = |u_n| \times |v_n| \leq \varepsilon \times M = \varepsilon' \Rightarrow |u_n v_n| < \varepsilon'$$

pour finir on posera alors $n_0 = n_1$. ■

Exemple 2 Déterminer la nature des suites de terme général (u_n)

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n}, \quad u_n = \frac{\cos n}{n}.$$

Opérations sur les limites

Si $u_n \rightarrow \ell$ et $v_n \rightarrow m$ alors :

$$u_n \pm v_n \rightarrow \ell \pm m, \quad u_n v_n \rightarrow \ell m, \quad \text{si } v_n \not\rightarrow 0 \text{ et } m \neq 0, \quad \frac{u_n}{v_n} \rightarrow \frac{\ell}{m}.$$

Exemple 1.9 déterminer la nature de la suite suivante $u_n = \left(\frac{3 + (\pi \times 7^n)}{5 - (e \times 7^n)} \right)$

$$u_n = \left(\frac{3 + (\pi \times 7^n)}{5 - (e \times 7^n)} \right) = \frac{7^n}{7^n} \left(\frac{\frac{3}{7^n} + \pi}{\frac{5}{7^n} - e} \right) = \left(\frac{\frac{3}{7^n} + \pi}{\frac{5}{7^n} - e} \right) . \text{car } 7^n \neq 0$$

Or $\frac{3}{7^n} + \pi$ converge vers π , car $\frac{3}{7^n}$ converge vers 0 et $\pi \rightarrow \pi$.

De meme $\frac{3}{7^n} - e$ converge vers $-e$, car $\frac{3}{7^n}$ converge vers 0 et $e \rightarrow e$.

conclusions $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\frac{\pi}{e}$.

Corollaire 1.1 Considerons deux suites (u_n) et (v_n) telle que $0 \leq u_n \leq v_n$, alors

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0$ alors $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

Limite d'une suite récurrente

Proposition 3 Soit la suite (u_n) qui est définie par une relation réccurente de la forme

$\{u_0 = \alpha \text{ et } u_{n+1} = f(u_n)\}$, où f est une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ alors la limite l de la suite réccurente (u_n) verifie $f(l) = l$ où $l \in I$.

Remarque 1.7

1. Les solutions de l'équation $f(x) = x$ sont appelés les points fixes de f .
2. Soit a un point fixe de f , si $u_0 \leq a$ alors $u_n \leq a, \forall n \in \mathbb{N}$.

Théorème 1.6 Soit (u_n) une suite récurrente et f est l'application qui lui est associée.

Si f est croissante alors (u_n) est monotone, de plus

Si $u_0 \leq u_1$ alors (u_n) est croissante.

Si $u_0 \geq u_1$ alors (u_n) est décroissante.

Théorème 1.7 Soit (u_n) une suite récurrente et f est l'application qui lui est associée.

Si f est décroissante alors (u_n) n'est pas monotone, de plus (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones en variation contraire, en d'autres termes:

Si $u_0 \leq u_2$ alors (u_{2n}) est croissante et (u_{2n+1}) est décroissante.

Si $u_0 \geq u_2$ alors (u_{2n}) est décroissante et (u_{2n+1}) est croissante.

Exemple 1.10

1) Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{u_n + 2}$.

Dans ce cas $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$ et $I = [0, +\infty[$.

$f'(x) = \frac{1}{(x+2)^2} > 0$ alors f est croissante

donc la suite (u_n) est monotone et puisque $u_1 = \frac{1}{2} > 0 = u_0$ alors (u_n) est croissante.

de plus $f(x) = \frac{x+1}{x+2} = 1 - \frac{1}{x+2}$ est majorée par 1, alors (u_n) converge vers 1

Ainsi la limite l vérifie

$$f(l) = l \Leftrightarrow \frac{l+1}{l+2} = l \Leftrightarrow l^2 + l - 1 = 0 \Leftrightarrow l = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

2) Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$.

Dans ce cas $f(x) = \sqrt{2x+3}$ et $I = [0, +\infty[$.

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x+3}} > 0$ alors f est croissante

donc la suite (u_n) est monotone et puisque $4 = u_0 > u_1 = \sqrt{2}$ alors (u_n) est décroissante.

de plus $f(x) = \sqrt{2x+3}$ est minorée par $\sqrt{3}$, alors (u_n) converge vers 1

Ainsi la limite l vérifie

$$f(l) = l \Leftrightarrow \sqrt{2l+3} = l \Leftrightarrow l^2 - 2l - 3 = 0 \Leftrightarrow l = 3$$

Définition 1.5 Une suite (u_n) est dite **divergente** si sa limite est égale à l'infinie ou bien deux limites ou plus.

Exemple 1.11

1) $u_n = n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

2) $v_n = (-1)^n$, si $n = 2k$ alors $v_n = 1$, si $n = 2k+1$ alors $v_n = -1$.

La limite n'existe pas car on a le cas d'indice pair et l'indice impair.

Définition 4 (Divergence)

1) On dit que (u_n) diverge vers $+\infty$ si: $\forall A > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0, |u_n| \geq A$.

On écrit alors $u_n \rightarrow +\infty$ ou $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$.

2) On dit que la suite (u_n) tend vers $-\infty$ si: $\forall A > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0, |u_n| \leq -A$.

On écrit alors $u_n \rightarrow -\infty$ ou $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = -\infty$.

Exemple 1.12

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = +\infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} ; \forall n \geq n_0, |\sqrt{n}| \geq A$$

Ainsi $\sqrt{n} \geq A \Leftrightarrow n \geq A^2$.

Il suffit de choisir $n_0 \geq A^2$ et $n \geq n_0$ pour que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = +\infty$.

Corollaire 1.2 *Considérons deux suites (u_n) et (v_n) telle que $u_n \leq v_n$, alors*

- 1) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = +\infty$.
- 2) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = -\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = -\infty$.

1.5.2 Lemme de la monotonie d'une suite

Théorème 1.8 (Convergence monotone)

- 1) Une suite croissante et majorée est convergente et sa limite est égale à sa borne supérieure.
- 2) Une suite décroissante et minorée est convergente et sa limite est égale à sa borne inférieure.

Preuve: Soit (u_n) une suite croissante et supposons qu'elle est majorée par M .

L'ensemble $A = \{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ est non vide et majorée, donc $\ell = \sup A$ existe.

Montrons que $u_n \rightarrow \ell$.

Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la borne supérieure, il existe n_0 tel que $u_{n_0} > \ell - \varepsilon$.

Pour tout $n \geq n_0$, comme la suite est croissante, $u_n \geq u_{n_0} > \ell - \varepsilon$ et toujours $u_n \leq \ell$, donc $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$.

D'où la convergence. ■

Exemple 1.13 Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = 2 - \frac{1}{U_n}, U_0 = 2$.

- 1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n > 1$.
- 2) La suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle monotone?
- 3) La suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle convergente? Quelle serait sa limite?

1.5.3 Lemme de convergence des suites Adjacentes

Définition 5 Deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes si :

- a) u_n est croissante,
- b) v_n est décroissante,
- c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (v_n - u_n) = 0$ (elles sont “de plus en plus proches”).

Théorème 1.9 Si (u_n) et (v_n) sont adjacentes alors elles convergent vers la même limite ℓ et pour tout n , $u_n \leq \ell \leq v_n$.

Exemple 1.14 Soient $(u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!})$ et $(v_n = u_n + \frac{1}{n!})$ sont adjacentes car

a) (u_n) est croissante, car

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} > 0$$

b) (v_n) est décroissante, car

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)!} - u_n - \frac{1}{n!} = \frac{2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{1-n}{(n+1)!} < 0$$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (v_n - u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} = 0$.

Alors elles convergent vers la même limite.

1.5.4 Théorème d'encadrement (Règle de Gendarmes)

Théorème 1.10 Soient $(a_n), (b_n), (c_n)$ sont trois suites réelles telles que, pour n assez grand, $a_n \leq b_n \leq c_n$ et si $a_n \rightarrow \ell$ et $c_n \rightarrow \ell$, alors $b_n \rightarrow \ell$.

Preuve: Soit $\varepsilon > 0$. Comme $a_n \rightarrow \ell$ il existe n_1 tel que $|a_n - \ell| < \varepsilon$ pour $n \geq n_1$. De même $c_n \rightarrow \ell$ donne n_2 tel que $|c_n - \ell| < \varepsilon$ pour $n \geq n_2$. Pour $n \geq N = \max(n_1, n_2)$ on a $\ell - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < \ell + \varepsilon$, donc $|b_n - \ell| < \varepsilon$. ■

Exemple 1.15 Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} = 0$.

On utilise $-1 \leq \sin n \leq 1$ et on encadre: $-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, d'où le résultat par gendarme.

1.5.5 Les sous suite

Définition 1.6

Soient (u_n) une suite numérique réelle et $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une application strictement croissante.

La suite (v_n) définie par $v_n = u_{\varphi(n)}$ est dite suite extraite ou bien sous suite de la suite (u_n) .

Exemple 1.16 Soit $u_n = (-1)^n$, $u_{2n} = (-1)^{2n} = 1$ et $u_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = -1$ sont deux sous suite de la suite (u_n) .

Théorème 1.11

Si la suite (u_n) converge vers l alors toute sous suite de (u_n) converge et elle converge vers l .

La contraposée de ce théorème est:

Remarque 1.8 Si une suite (u_n) admet une sous suite divergente alors la suite (u_n) diverge.

Par conséquent pour montrer qu'une suite diverge il suffit de

- 1) montrer qu'elle admet une sous suite qui diverge.
- 2) ou bien de montrer qu'elle admet deux sous suites qui convergent vers deux limites distinctes.

Exemple 1.17 Montrer que la suite de terme général $u_n = (-1)^n$ diverge.

En effet, soient les deux sous suites de (u_n) ; $w_1 = u_{2n} = (-1)^{2n}$ et $w_2 = u_{2n+1} = (-1)^{2n+1}$.

On a (w_1) converge vers 1 et (w_2) converge vers -1

et comme $1 \neq -1$ alors (u_n) diverge.

Exemple 1.18 Montrer que les suites suivantes sont divergentes $u_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ et $v_n = \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$.

Théorème 1.12 Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite l alors la suite (u_n) converge et elle converge vers l .

Preuve:

Soit $\varepsilon > 0$, comme $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{2n} = \ell$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_1$ on a $|u_{2n} - \ell| < \varepsilon$.

De même, comme $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{2n+1} = \ell$, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_2$ on a $|u_{2n+1} - \ell| < \varepsilon$.

Posons $M = \max(2N_1, 2N_2 + 1)$.

Montrons que pour tout $n \geq M$, on a $|u_n - l| < \epsilon$.

Si n est pair, $n = 2k$ et comme $n \geq M \geq 2N_1$, on a $k \geq N_1$ et donc

$$|u_n - l| = |u_{2k} - l| < \epsilon$$

Si n est impair, $n = 2k + 1$ et comme $n \geq M \geq 2N_2 + 1$, on a $k \geq N_2$ et donc

$$|u_n - l| = |u_{2k+1} - l| < \epsilon$$

Ainsi pour tout $n \geq M$, on a $|u_n - l| < \epsilon$.

Par la définition de la convergence, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \ell$. ■

Théorème 1.13 (de Bolzano-Weirstrass)

Pour toute suite bornée, on peut extraire une sous suite convergente.

1.5.6 Les suites de Cauchy

Définition 1.7 Une suite réelle $(u_n)_{n \geq 1}$ est dite **de Cauchy** si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $q > p \geq N$, on ait $|u_p - u_q| < \varepsilon$.

Autrement dit

Cette définition exprime l'idée que les termes de la suite deviennent arbitrairement proches les uns des autres lorsque n devient grand.

Exemple 1.19 La suite définie par $u_n = \frac{1}{n}$ est une suite de Cauchy.

Démonstration : Soit $\varepsilon > 0$. Supposons que $q > p$ alors $|q - p| = q - p \leq q$, donc :

$$|u_p - u_q| = \left| \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right| = \frac{|q - p|}{pq} \leq \frac{q}{pq} = \frac{1}{p}.$$

Pour que $\frac{1}{p} < \varepsilon$ il suffit de choisir $p > \frac{1}{\varepsilon}$ et puisque $q > p$, on aura aussi $q > \frac{1}{\varepsilon}$

Maintenant choisissons le bon N ,

en effet, prenons $N = \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil$.

alors pour tous $p, q \geq N$ on a $|u_p - u_q| \leq \frac{1}{p} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$.

Ainsi, (u_n) est une suite de Cauchy.

Théorème 1.14 *Toute suite de Cauchy est bornée.*

Théorème 1.15 *La suite (u_n) converge dans $\mathbb{R}$ si et seulement si (u_n) est une suite de Cauchy.*

Preuve:

1) Soit (u_n) une suite convergente de limite $l \in \mathbb{R}$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe N tel que pour tout $n \geq N$, $|u_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Alors, pour tous $p, q \geq N$: $|u_p - u_q| \leq |u_p - l| + |u_q - l| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Ainsi (u_n) est une suite de Cauchy.

2) Pour la réciproque

Soit (u_n) une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$. La suite est bornée (on peut le montrer en prenant $\varepsilon = 1$).

Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, elle admet une sous-suite convergente. On montre alors que la suite entière converge vers la même limite. ■

Remarque 1.9

1) *La suite (u_n) diverge si et seulement si (u_n) n'est pas de Cauchy.*

2) *La suite (u_n) n'est pas de Cauchy si et seulement si*

$$\exists \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}; \exists p, q \in \mathbb{N} : p \geq q \geq n_0 \text{ et } |u_p - u_q| \geq \varepsilon$$

Exemple 1.20 Soit $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

1) Calculer $u_{2n} - u_n$

$$u_{2n} - u_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

2) En déduire que (u_n) diverge

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{n+1} \geq \frac{1}{2n} \\ \frac{1}{n+2} \geq \frac{1}{2n} \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{1}{n+n} \geq \frac{1}{2n} \end{array} \right\} \Rightarrow u_{2n} - u_n \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Par conséquent

$$\exists \varepsilon = \frac{1}{2} > 0, \forall n \in \mathbb{N}; \exists p = 2n, q = n \in \mathbb{N} : p \geq q \geq n \text{ et } |u_p - u_q| \geq \frac{1}{2}$$

Conclusion (u_n) n'est pas de Cauchy donc elle diverge.

1.6 Exercices

Exercice 1 *Vrai ou faux?*

- 1) Si une suite n'est pas majorée, elle est minorée.
- 2) Si une suite n'est pas croissante, elle est décroissante.
- 3) Si une suite est négative, elle est majorée.
- 4) Si une suite est décroissante et minorée par 0, converge vers 0.

Exercice 2

- 1) soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de terme général $U_n = \frac{(-1)^n}{n}$
 - a) Cette suite est-elle positive? négative?
 - b) Est-elle majorée? minorée?
 - c) Est-elle croissante? décroissante?
 - d) pourquoi elle converge?
 - e) Pouvez-vous trouver toutes les valeurs de $n \in \mathbb{N}$ telles que $|U_n| \leq 10^3$.
- 2) Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de terme général $U_n = \frac{n-2}{2n}$.
Par deux méthodes différentes, montrer que $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée.

Exercice 3

- 1) En utilisant la définition de la limite, montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n-1}{2n+1} = \frac{5}{2}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{5} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty.$$

- 2) Déterminer les limites des suites numériques suivantes

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^5 5^n + n^7 7^n}{3^n + 8^n} \right), \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}), \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 + k} \right)$$

Exercice 4

- 1) A l'aide de la règle **d'encadrement de gendarmes**, montrer que les suites de termes généraux suivants sont convergentes et calculer leurs limites:

$$u_n = \frac{n^2 \sin(n^3 + 1)}{n^3 + 1}, \quad u_n = \left(\sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k} \right), \quad u_n = \left(\sum_{k=1}^n \frac{2n+1}{3n^2 + k} \right).$$

$$u_n = \frac{\sin(n)}{n + (-1)^{n+1}}, \quad u_n = \frac{n - (-1)^n}{n + (-1)^n}$$

2) A l'aide des **sous-suites**, montrer que les limites suivantes n'existent pas

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right), \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right),$$

Exercice 5

1) Par récurrence, montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

2) On rappelle que la partie entière d'un nombre réel x est l'unique entier, noté $E(x)$, vérifiant $E(x) \leq x < E(x) + 1$.

a) Etablir que $x - 1 < E(x) \leq x$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$U_n = \frac{E(\pi) + E(2\pi) + \dots + E(n\pi)}{n^2}$$

Montrer que l'on a l'encadrement

$$\frac{\pi(n+1) - 2}{2n} < U_n \leq \frac{\pi(n+1)}{2n}$$

c) Dédurre que la suite (U_n) est convergente puis déterminer sa limite.

Exercice 6 Soit la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général U_n définie par

$$U_n = \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n+1)}{3 \times 6 \times \dots \times (3n+3)}.$$

est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 7 On considère la suite (U_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = \frac{U_n}{2} + \frac{3}{2U_n}$ et $U_0 = 10$.

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \geq 0$.

b) si la suite (U_n) converge, déterminer sa limite?

c) Notons $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$, Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n - l > 0$.

d) En déduire que (U_n) est décroissante, que peut-on conclure?

Exercice 8 On considère la suite (U_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = U_n^2 + \frac{2}{9}$ et $U_0 = \frac{1}{2}$.

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, \frac{1}{3} < U_n < \frac{2}{3}$.

2) Vérifier que U_n est monotone.

3) En déduire que U_n est convergente et donner sa limite.

Exercice 9 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{8+5u_n}{3+u_n}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.

2. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = \frac{u_n-4}{u_n+2}$, calculer v_{n+1} en fonction de v_n .

3. Montrer que la suite (u_n) est convergente et donner sa limite.

Exercice 10 Soit (U_n) la suite définie par: $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = U_n + \frac{1}{U_n}$

1) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, U_n > 0$.

2) Etudier les variations de (U_n) .

3) La suite (U_n) peut elle converger vers une limite finie ?

Exercice 11 Soit (U_n) la suite définie par: $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = U_n^2 + 1$.

1) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, U_n > 1$.

2) Etudier la monotonie

3) Calculer les points fixe de $f(x) = x^2 + 1$ sur $[1, +\infty[$ puis en déduire la nature de (U_n) .

Exercice 12 Soit (U_n) la suite définie par: $U_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{2U_n + 3}$ et $U_0 \in \mathbb{R}^+$.

1) Etudier la monotonie de (U_n) sur $[0, +\infty[$.

2) Etudier le signe de $u_1 - u_0$.

Exercice 13 Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par $u_0 \in]0, 1]$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{(u_n)^2}{4}$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.

2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 1$.

3. Montrer que la suite est monotone. En déduire qu'elle est convergente.

4. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$.

Exercice 14 Etudier si les suites suivantes sont adjacentes

1. $u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$...et $v_n = u_n + \frac{1}{n}$.

2. $u_n = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^3}$ et $v_n = U_n + \frac{1}{n^2}$.

Exercice 15 On considère les suites (u_n) et (v_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0, & v_0 = 2. \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}, & v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

- 1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq v_n$.
- 2) Etudier le sens de variation de chacune des deux suites.
- 3) Montrer que la différence $(u_n - v_n)$ tend vers 0
- 4) En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont **adjacentes** puis déterminer leur limite commune.

Exercice 16 On considère les deux suites $(x_n)_{n \geq 0}$ et $(y_n)_{n \geq 0}$ tel que $x_0 < y_0$ définies par:

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_{n+1} = \frac{2x_n + y_n}{3} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} y_0 = 2 \\ y_{n+1} = \frac{x_n + 2y_n}{3} \end{cases}$$

On considère la suite $(w_n)_{n \geq 0}$ définie par $w_n = x_n - y_n$.

1. Démontrer que $(w_n)_{n \geq 0}$ est géométrique, convergente et déterminer sa limite.
2. Etudier le sens de variations des suites $(x_n)_{n \geq 0}$ et $(y_n)_{n \geq 0}$.
3. Montrer que les suites $(x_n)_{n \geq 0}$ et $(y_n)_{n \geq 0}$ sont adjacentes et qui convergent vers la même limite que nous noterons L .
4. Calculer $x_n + y_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire la valeur de L .

Exercice 17

1) On considère la suite (U_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \frac{4}{5}U_n + \frac{1}{5}$ et $U_0 = 0$.

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, |U_{n+1} - U_n| = (\frac{4}{5})^n |U_1 - U_0|$.

b) Déduire que (U_n) est de Cauchy, calculer alors la limite.

2) Montrer que la suite $U_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ est de Cauchy, que déduiser vous.

3) Montrer que la suite $U_n = \sum_{k=1}^n \frac{\cos k}{k!}$ est de Cauchy, que déduiser vous.

Les suites suivantes sont-elles de Cauchy

4) $U_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{2^2}{4^2} + \dots + \frac{n^2}{4^n}$ (montrer d'abord que $4^n > n^4$, $n \geq 5$).

5) $U_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$.

(Indication, montrer que la suite U_n est croissante puis calculer $|U_{2n} - U_n|$, que déduiser vous).