Semestre : 01 : Fondamentale

Matière : Analyse1-Crédits : 6 -Coefficient : 4

Programme

Chapitre I : Le Corps des Réels

Chapitre II : Le Corps des Nombres Complexes

Chapitre III : Suites de Nombres réels

Chapitre V: Fonctions continues et fonctions dérivables

Chapitre 1

Les nombres réels

1.1 Introduction

1.1.1 Les modes de raisonnement en mathématiques

Les modes de raisonnement (direct, contraposée, absurde, disjonction de cas et récurrence) sont des outils fondamentaux en mathématiques pour établir des vérités avec rigueur et logique.

Raisonnement direct

On démontre une implication $P \Rightarrow Q$ en enchaînant directement les étapes logiques à partir de P pour arriver à Q.

Exemple: Si n est divisible par 4, alors n est pair.

En effet, $n = 4k = 2(2k)$, donc n est pair.

Raisonnement par contraposée

Pour prouver $P \Rightarrow Q$, il suffit de montrer $(nonQ) \Rightarrow (nonP)$.

Exemple: Soit $a \in \mathbb{N}$, si 2 divise a^2, alors 2 divise a

Contraposée : Si 2 ne divise pas a, alors 2 ne divise pas a^2.

2 ne divise pas $a \Leftrightarrow a = 2k+1, k \in \mathbb{N} \Leftrightarrow a^2 = (2k+1)^2 = 2(2k^2+2k)+1$,

d'ou 2 ne divise pas a^2.

Raisonnement par l'absurde

On suppose que la proposition à prouver est fausse. Si cela conduit à une contradiction, la proposition est donc vraie.

Exemple : Montrons que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

Supposons qu'il soit rationnel : $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ avec p et q entiers premiers entre eux.

Alors $\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow 2q^2 = p^2$, donc 2 divise p^2, d'ou 2 divise p c à d, il existe $k \in \mathbb{Z}$, tel que $p = 2k$.

$2q^2 = p^2 \Leftrightarrow 2q^2 = (2k)^2 \Leftrightarrow q^2 = 2k^2$, ainsi 2 divise q^2, d'ou 2 divise q.

Donc $GDC(p, q) = 2$, qui est une contradiction le faite que p et q entiers premiers entre eux.

Donc $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Raisonnement par disjonction de cas

On étudie séparément les différents cas possibles et on montre que la propriété est vraie dans chacun.

Exemple :

Montrons que pour tout entier n, $(n^2 - n)$ est divisible par 2.

- Cas 1 : n est pair, donc $n = 2k \Rightarrow n^2 - n = 4k^2 - 2k = 2(k^2 - k)$.

- Cas 2 : n est impair, donc $n = 2k + 1 \Rightarrow n^2 - n = (2k + 1)^2 - (2k + 1) = 2(2k^2 + 2)$.

Conclusion : Dans les deux cas, la propriété est vérifiée.

Raisonnement par récurrence

Méthode pour prouver qu'une propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Étapes : 1. Initialisation :

Vérifier $P(n)$ est vraie pour $n = n_0$

Étapes : 2 Hérédité :

Supposer $P(k)$ vraie pour $k \geq n_0$, montrer alors que $P(k + 1)$ est vraie.

Conclusion :$P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Exemple: Montrons que $P(n) = 1 + 2 + \ldots + n = n(n + 1)/2$ pour tout $n \geq 1$.

- Initialisation :

Pour $n = 1$, $1 = 1(1+1)/2$, vrai

- Hérédité :

supposons que $P(n)$ est vrai pour $n = k$: $1 + 2 + \ldots + k = k(k+1)/2$.

Alors pour $n = k + 1$

$1 + 2 + \ldots + k + (k+1) = k(k+1)/2 + (k+1) = (k+1)(k+2)/2$.

Donc la formule est vraie par récurrence.

1.2 Les nombres réels

Notations

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$ est l'ensemble des entiers naturels.
- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$ est l'ensemble des entiers relatifs.
- $\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} \text{ tels que } m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{Z}^*,\ PGCD(m,n) = 1\right\}$ est l'ensemble des nombres rationnels.
- La notation $GCD(m,n) = 1$, désigne que m et n sont premier entre eux
- $\overline{\mathbb{Q}}$ est l'ensemble des nombres irrationnels tel que $\mathbb{Q} \cap \overline{\mathbb{Q}} = \emptyset$. Mais
- $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \overline{\mathbb{Q}}$ est l'ensemble des nombres réels.
- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

1.2.1 Les nombres décimals

Définition

Un nombre décimal fini est un nombre rationnel de la forme $r = \frac{p}{10^n}$, $p \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$.

Exemple: $r = 1.567$, $p = 0,2626....26$, $l = 7,8513513.......$

Proposition:

Un nombre réel r est rationnel si et seulement si il admet une ecriture décimal finie ou décimal periodique.

Exercice:

1. Ecrire les nombres précédents sous forme rationnels.

2. Montrer que $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal fini

1.2.2 Les nombres irrationnels

Définition

On dit qu'un nombre est irrationnel s'il ne vérifie pas la propriété des nombres rationnels, pour cela pour vérifie qu'un nombre n'est pas rationnel on utilise le **raisonnement par l'absurd** pour utiliser la définition des nombres rationnels.

Autrement dit $p \notin \mathbb{Q}$ s'il n'admet pas une écriture décimal finie ou décimal périodique.

- On note l'ensemble des nombres irrationnels par $\overline{\mathbb{Q}}$ tel que $\mathbb{Q} \cap \overline{\mathbb{Q}} = \emptyset$ et $\mathbb{Q} \cup \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Exemple: Nombres irrationnels

$\sqrt{2} = 1.14...,\ \log_2 3,\ \pi = 3.1415.....,\ e = 2.71...$

Exercice: Montrer que les nombres $\sqrt{2}$, $\log_2 3$ ne sont pas rationnels.

Proposition $\mathbb{Q}$ est un corps, en effet

1) $(\mathbb{Q}, +)$ **est un groupe abélien**

$\forall p, q \in \mathbb{Q},\ p + q \in \mathbb{Q}$ (stabilité)

$\forall p, q \in \mathbb{Q},\ p + q = q + p$ (commutativité)

$0 \in \mathbb{Q},\ \forall p \in \mathbb{Q},\ p + 0 = p$ (élément neutre)

$\forall p \in \mathbb{Q},\ -p \in \mathbb{Q},$ et $p + (-p) = 0$ (opposé)

$\forall p, q, r \in \mathbb{Q},\ (p + q) + r = p + (q + r)$. (associativité))

2) $(\mathbb{Q}^*, \times)$ **est un groupe abélien**

$\forall p, q \in \mathbb{Q},\ p \times q \in \mathbb{Q}$

$\forall p, q \in \mathbb{Q},\ p \times q = q \times p$

$1 \in \mathbb{Q},\ \forall p \in \mathbb{Q},\ p \times 1 = p$

Si $p \in \mathbb{Q}^*$, alors $p^{-1} \in \mathbb{Q}$, et $p \times (p^{-1}) = 1$

$\forall p, q, r \in \mathbb{Q},\ (p \times q) \times r = p \times (q \times r)$

3) (**La multiplication est distributive par rapport à l'addition**)

$\forall p, q, r \in \mathbb{Q},\ p \times (q + r) = (p \times q) + (q \times r)$.

1.2.3 Propriétés

1. Si $p \in \mathbb{Q}$ et $q \in \overline{\mathbb{Q}}$ alors $p + q \notin \mathbb{Q}$.

   Si $p \in \mathbb{Q}^*$ et $q \in \overline{\mathbb{Q}}$ alors $p \times q \notin \mathbb{Q}$.

Preuve: Voir TD ■

1.2.4 Rappel à l'ordre

Notations

$$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}, \qquad \mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\},$$
$$\mathbb{R}^+_* = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}, \qquad \mathbb{R}^-_* = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}.$$

Pour $x, y \in \mathbb{R}$ on désigne par $max(x; y)$ et $min(x; y)$ les nombres

$$\max(x; y) = \begin{cases} x \text{ si } y \leq x \\ y \text{ si } x \leq y \end{cases}, \quad \min(x; y) = \begin{cases} x \text{ si } x \leq y \\ y \text{ si } y \leq x \end{cases}$$

Propriétés

1. $\forall x, y \in \mathbb{R} :\ x \leq y$ ou $y \leq x$.
2. $\forall x, y, z \in \mathbb{R} :\ x \leq y \iff x + z \leq y + z$.
3. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ \forall z \in \mathbb{R}^+_* :\ x \leq y \iff xz \leq yz$.
4. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ \forall z \in \mathbb{R}^-_* :\ x \leq y \iff xz \geq yz$.
5. Si $x, y \in \mathbb{R}$ et $xy > 0$ alors $x \leq y \iff \frac{1}{x} \geq \frac{1}{y}$.
6. Si $x, y \in \mathbb{R}$ et $y > 0$ alors $x \leq y \iff \frac{x}{y} \leq 1$.
7. Si $x, y \in \mathbb{R}$ et $y < 0$ alors $x \leq y \iff \frac{x}{y} \geq 1$.
8. Si $x \leq y$ et $x' \leq y'$ alors $x + x' \leq y + y'$.

1.3 La valeur absolue

Définition

On appelle *valeur absolue* d'un réel x, notée $|x|$, le nombre réel :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Propriétés

1. $\forall x \in \mathbb{R}: \ |x| = 0 \iff x = 0.$
2. $\forall x \in \mathbb{R}: \ \sqrt{x^2} = |x| \geq 0.$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \ \forall a \geq 0: \ |x| \leq a \iff -a \leq x \leq a.$
4. $\forall x \in \mathbb{R}, \ \forall a \geq 0: \ |x| \geq a \iff x \geq a$ ou $x \leq -a.$
5. $\forall x \in \mathbb{R}. \ -|x| \leq x \leq |x|$
6. $\forall x, y \in \mathbb{R}: \ |xy| = |x|\,|y|.$
7. $\forall x, y \in \mathbb{R}: \ |x+y| \leq |x| + |y|$ (inégalité triangulaire).(démonstration voir TD)
8. $\forall x, y \in \mathbb{R}: \ ||x| - |y|| \leq |x-y|$.(démonstration voir TD).
9. La quantité $|x-y|$ représente la distance entre x et y et $|x|$ est la distance entre x et 0.

1.4 Les intervalles

1.4.1 Définition

On appelle intervalle $I = [x, y]$ de $\mathbb{R}$, vérifiant pour tout x et y dans I et pour tout $z \in \mathbb{R}$

$$\text{si } (x \leq z \leq y) \Rightarrow (z \in I)$$

Exemple

1. $[0,1[,]-\infty,2]$ sont des intervalle.
2. $\mathbb{Z}$ n'est pas un intervalle car pour $x=0$ et $y=1$ tout deux appartient a $\mathbb{Z}$, mais $0 \leq \frac{1}{3} \leq 1$ et $\frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$

Remarque

1. On appelle l'intervalle $[a,b]$ un intervalle fermé et $]a,b[$ un intervalle ouvert.
2. $\{a\}=[a,a]$ est dit singletent.
3. $\emptyset$ est l'intervalle qui ne contient aucun élément.

1.4.2 Propriété

Soit I_1, I_2 deux intervalle de $\mathbb{R}$, si

$$I_1 \cap I_2 \neq \emptyset \Rightarrow I_1 \cap I_2 \text{ est un intervalle de } \mathbb{R}$$

1.4.3 Définition

Soit $a \in \mathbb{R}$, on dit que V est un voisinage de a si et seulement si il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\subset V$,

Autrement dit:

Un voisinage de a est un intervalle contenant un intervalle ouvert qui contient a

Exemple

1. $]3,4[$ est un voisinage de π.
2. $]-\varepsilon,\varepsilon[$ est un voisinage de 0

1.4.4 Propriété d'Archimède

Définition

$\mathbb{R}$ est Archimedien, si

1. $\forall x > 0$, il existe un $n \in \mathbb{N}^*$, vérifiant $n > x$.
2. $\forall \varepsilon > 0$, il existe un $n \in \mathbb{N}^*$, vérifiant $\frac{1}{n} < \varepsilon$

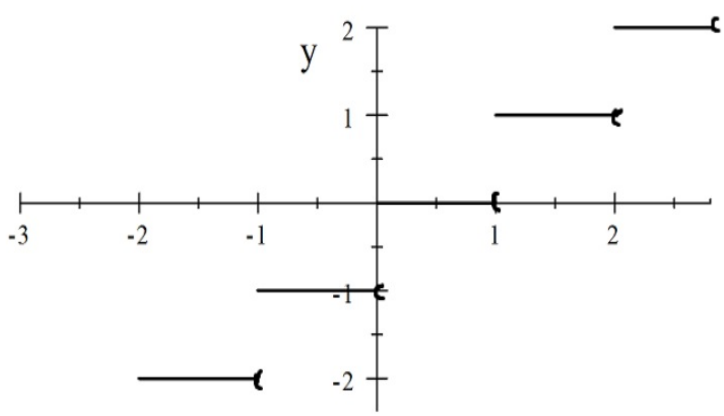
Cette définition nous permet de définir "la partie entière".

1.4.5 La partie entière

Définition

Soit x un nombre réel. Le plus grand entier inferieur ou égale a x s'appelle la partie entiere de x on la note par $E(x)$ ou $[x]$

Le graphe de la fonction $E(x)$ est le suivant



– courbe représentative de la partie entière

Exemple

$E(\pi) = 3,\ E(-\pi) = -4,\ E(-5) = -5,\ E(0,1) = 0,\ E(-7,1) = -8,\ E(2) = 2.$

____M.KADA KLOUCHA

Propriétés:

La partie entière à les propriétés suivantes.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $E(x) \leq x < E(x) + 1 \Leftrightarrow x - 1 < E(x) \leq x$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a $E(n) = n$.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, et pour tout $n \in \mathbb{Z}$ ona $E(x + n) = E(x) + n$.
4. Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ si $x < y$ alors $E(x) \leq E(y)$.
5. Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ on a $E(x + y) = E(x) + E(y) + \alpha$, $\alpha \in \{0, 1\}$.

Preuve: Voir TD ■

1.4.6 Théorème (Densité)

$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ c.à.d, si $x < y$; $\exists r \in \mathbb{Q}, x \leq r \leq y$

Preuve: Supposons que $x, y \in \mathbb{R}^{+*}$, telque $x < y$ et soit $q = [\frac{1}{y-x}] + 1$ et $p = [qx]$

$$p = [qx] \Leftrightarrow p \leq qx < p + 1 \Leftrightarrow \frac{p}{q} \leq x < \frac{p+1}{q} = \frac{p}{q} + \frac{1}{q} < x + \frac{1}{q} \tag{1}$$

De plus

$$q = [\frac{1}{y-x}] + 1 \Leftrightarrow q - 1 = [\frac{1}{y-x}]$$

Ce qui implique que

$$q - 1 \leq \frac{1}{y-x} < q \Leftrightarrow \frac{1}{q} < y - x \leq \frac{1}{q-1} \Leftrightarrow \frac{1}{q} < y - x \leq \frac{1}{q-1} \Leftrightarrow \frac{1}{q} + x < y \leq \frac{1}{q-1} + x \tag{2}$$

D'où de (1) et (2), on a

$$x < \frac{p}{q} + \frac{1}{q} < x + \frac{1}{q} < y$$

Le rationnel recherché est ainsi $r = \frac{p}{q} + \frac{1}{q}$. ■

1.5 Bornes supérieure et borne inférieure

Dans tout ce qui suit, on suppose que E est une partie non vide de $\mathbb{R}$.

1.5.1 Majorant et minorant

- Un élément $M \in \mathbb{R}$ est un *majorant* de E si et seulement si $\forall x \in E,\ x \leq M$.
- Un élémentt $m \in \mathbb{R}$ est un *minorant* de E si et seulement si $\forall x \in E,\ x \geq m$.

1.5.2 Partie majorée, minorée, bornée

1. E est majorée ssi E admet un majorant.
2. E est minorée ssi E admet un minorant.
3. E est bornée ssi elle est à la fois majorée et minorée.

1.5.3 Exemples

1. $E_1 = \{1, 2, 3\}$, 3 est un majorant, 5 est un majorant, 1 un minorant.
2. $E_2 = [0, 2[$, 2 est un majorant, 0 un minorant, -1 un minorant.
3. $E_3 =]0, +\infty[$, pas de majorant, 0 est un minorant.
4. $E_4 = \{\cos x \mid x \in \mathbb{R}\}$, 1 est majorant, -1 est minorant.

1.5.4 Minimum et maximum

- M est un *maximum* de E (noté $\max E$) si M majore E et $M \in E$.
- m est un *minimum* de E (noté $\min E$) si m minore E et $m \in E$.

1.6 Borne supèrieure et borne infèrieure

Définition 1 (Borne supèrieure) *Soit E non vide et majorée.*

La borne superieure *de E, noté $\sup E$, est le plus petit des majorants de E.*

c,a,d $\forall x \in E, x \leq \sup E$.

Définition 2 (Borne infèrieure) *Soit E non vide et minorée.*

La borne inferieure *de E, noté* $\inf E$*, est le plus grand des minorants de E*

c,a,d $\forall x \in E, x \geq \inf E$

1.6.1 Axiomes

- **Axiome de la borne supèrieure:**

  Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supèrieure.

- **Axiome de la borne infèrieure:**

  Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne infèrieure.

1.6.2 Proposition

Soit E une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$.

1. Si $\max E$ existe alors $\sup E = \max E$.
2. Si $\sup E \in E$ alors $\max E$ existe de plus $\max E = \sup E$.

1.6.3 Proposition

Soit E une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$.

1. Si $\min E$ existe alors $\inf E = \min E$.
2. Si $\inf E \in E$ alors $\min E$ existe de plus $\min E = \inf E$.

1.6.4 Caractérisation de la borne supèrieure

Proposition 3 *Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}$. On a :*

$$M = \sup A \iff \begin{cases} M \text{ majore } A, (\forall x \in A,\ x \leq M) \\ \forall \varepsilon > 0\ \exists x \in A \text{ tel que } M - \varepsilon < x. \end{cases}$$

_ _M.KADA KLOUCHA

1.6.5 Caractérisation de la borne infèrieure

Proposition 4 *Soit A une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{R}$. On a :*

$$m = \inf A \iff \begin{cases} m \text{ minore } A, \ (\forall x \in A, \ m \leq x) \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in A \text{ tel que } x < m + \varepsilon. \end{cases}$$

1.6.6 Caractérisation séquentielle des bornes supèrieure et infèrieure

Proposition 5 *{Caractérisation séquentielle de la borne supèrieure}*

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et le réel $M = \sup A$ ssi

1) M est un majorant de A.

2) il existe une suite de nombre $u_n \in A$ qui converge vers M.

Proposition 6 *{Caractérisation séquentielle de la borne infèrieure}*

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et le réel $m = \inf\ A$ ssi

1) m est un minorant de A.

2) il existe une suite de nombre $v_n \in A$ qui converge vers m.

1.6.7 Propriétés

Soit A et B deux parties non vides et bornée de $\mathbb{R}$.

1. $\forall x \in A$, $\inf A \leq x \leq \sup A$.

2. $\forall x \in A$, $\sup A \leq$Tous les majorants.

3. $\forall x \in A$, $\inf A \geq$Tous les minorants.

4. Si $A \subset B$ alors $(\sup A \leq \sup B)$ et $(\inf B \leq \inf A)$.

5. $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$

6. $\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$

Exercice Soit les sous-ensembles suivants:

$$A = \{x \in \mathbb{R}, 1 < x \leq 3\},\ B = \left\{\frac{n}{n+m},\ n, m \in \mathbb{N}^*\right\}$$

1. Pour chaque ensemble proposé, déterminer (si elles existent) : la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément.
2. Pour l'ensemble A, prouver la réponse à l'aide de la caractérisation.
3. Pour l'ensemble B, prouver la réponse à l'aide de la caractérisation séquentielle..

Solution

1. Il est clair que $A \neq \emptyset$, car 3$\in A$, de plus $\forall x \in A$ on a $1 < x \leq 3$, donc A est majoré par 3 et minoré pâr 1, donc la borne supèrirure et inferieure existent.

   (a) Montrons que $\sup A = 3$

   On a $\forall x \in A$, $x \leq 3$ donc 3 est un majorant de A, ainsi $\sup A \leq 3$. Mais $3 \in A$, donc $3 \leq \sup A$ ainsi $3 = \sup A = \max A$.

   (b) Montrons que $\inf A = 1$.

$$1 = \inf A \iff \begin{cases} \forall x \in A,\ 1 \leq x \\ \forall \varepsilon > 0\ \exists x \in A \text{ tel que } x < 1 + \varepsilon. \end{cases}$$

   $\forall x \in A,\ 1 \leq x$ (est vérifier)

   Maintenant montrons qu'il eiste $x_\varepsilon \in A$ tel que $x < 1 + \varepsilon$.

   On a deux cas

   Si $\varepsilon \geq 2$, donc $\forall x \in A,\ x < 1 + \varepsilon$

   Si $0 < \varepsilon < 2$ il suffit de prendre $x_\varepsilon = 1 + \frac{\varepsilon}{2}$ pour que $x_\varepsilon < 1 + \varepsilon$, en effet

$$0 < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon < 2 \Leftrightarrow 1 < 1 + \frac{\varepsilon}{2} < 1 + \varepsilon < 3$$

2. $B = \left\{ \frac{n}{n+m},\ n, m \in \mathbb{N}^* \right\}$

B n'est pas vide car $\frac{1}{2} \in B$, $(n = 1, m = 1)$.

En plus B est bornée, en effet

$\forall n, m \in \mathbb{N}^*$ on a $0 < n < m + n$ d'ou $0 < \frac{n}{m+n} < 1$.

Donc B est majorée par 1 et minorée par 0, ce qui veut dire que les bornes sup et inf existent.

Maintenant a l'aide de la caractérisation séquentielle des bornes supèrieure et infèrieure, montrons que $\sup B = 1, \inf B = 0$.

$$1 = \sup B \iff \begin{cases} 1 \text{ majore B}, (\forall x \in B,\ x \leq 1) \\ \text{il existe une suite } (u_k) \in B, \text{ tel que } u_k \to 1. \end{cases}$$

On a vue que B est majorée par 1.

Pour construire une suite de B qui tend vers 1, on prend $m = 1$ et $n = k$.

Ainsi $u_k = \frac{k}{k+1} \in B$ et $u_k \to 1$.

montrons que $\inf B = 0$.

$$0 = \inf B \iff \begin{cases} 0 \text{ minore } B, (\forall x \in B,\ x \geq 0) \\ \text{il existe une suite } (u_k) \in B, \text{ tel que } u_k \to 0. \end{cases}$$

On a vue que B est minorée par 0.

Pour construire une suite de B qui tend vers 0, on prend $m = k$ et $n = 1$.

Ainsi $u_k = \frac{1}{1+k} \in B$ et $u_k \to 0$.

Puisque $\sup B \notin B$ donc $\max B$ n'existe pas de meme pour $\min B$ n'existe pas.