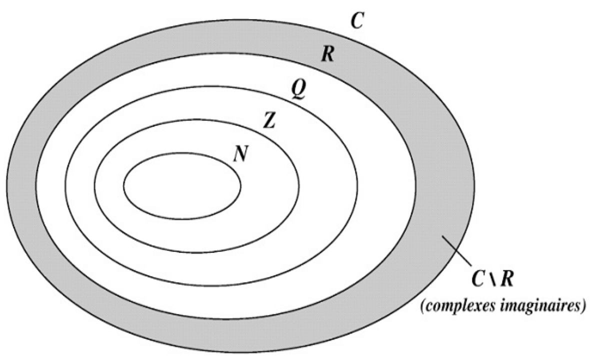
Chapitre 2

Nombres complexes

Introduction

Les nombres complexes forment un corps notée $\mathbb{C}$ qui contient $\mathbb{R}$. Ils permettent notamment de résoudre des équations polynomiales qui n'ont pas de racines réelles. On introduit une unité imaginaire i telle que $i^2 = -1$.



2.1 Forme algèbrique

Tout nombre complexe z s'écrit de forme unique $z = x + iy, \qquad x, y \in \mathbb{R}$.

On note $\mathrm{real}(z) = x$ la partie réeelle et $\mathrm{Im}(z) = y$ la partie imaginaire.

2.2 Conjuguée, inverse et opérations

Soientt les nombres complexes $z = x + iy$, $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$,

- Conjuguée : $\overline{z} = x - iy$ et $\overline{\overline{z}} = z$.
- Produit :

$$z_1 \times z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

$$\overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$$

- Somme :

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

$$\overline{z_1 + z_2} =: \overline{z}_1 + \overline{z_2}$$

- Soustraction

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

$$\overline{z_1 - z_2} =: \overline{z}_1 - \overline{z_2}$$

- Inverse (pour $z \neq 0$) : $z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \dfrac{x - iy}{x^2 + y^2}$.
- Division:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \left(\frac{x_1 + iy_1}{x_2 - iy_2}\right) \times \left(\frac{x_2 - iy_2}{x_2 + iy_2}\right)$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

- Egalité:

$$z_1 = z_2 \Rightarrow (x_1 = x_2) \text{ et } (y_1 = y_2).$$

- $\text{real}(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$ et $\text{Im}(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$.
- z est un réel pur $\Leftrightarrow z = \overline{z}$.
- z est un imaginaire pur $\Leftrightarrow z = -\overline{z}$.

2.3 Module et argument

Module

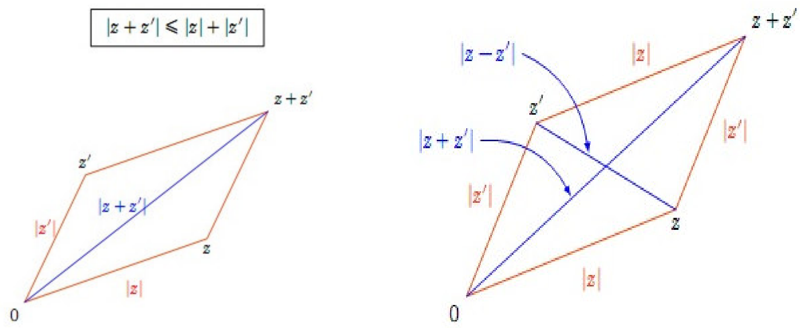
Le module de $z = x + iy$ est $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, et on a la relation : $z \times \overline{z} = |z|^2$.

Propriétés :

$$|z| \geq 0, \quad |z| = 0 \iff z = 0,$$

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \text{ (inégalité triangulaire)},$$

$$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2| \text{ (inégalité triangulaire inversée)}.$$



Preuve: 1)

$$\begin{aligned}
|z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} = (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) \\
&= z_1\overline{z_1} + \overline{z}_2 z_1 + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} \\
&= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,\mathrm{real}(z_2 \times \overline{z_1}) \\
&\leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,|\mathrm{real}(z_2 \times \overline{z_1})| \\
&\leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,|z_2 \times \overline{z_1}| \\
&\leq (|z_1| + |z_2|)^2
\end{aligned}$$

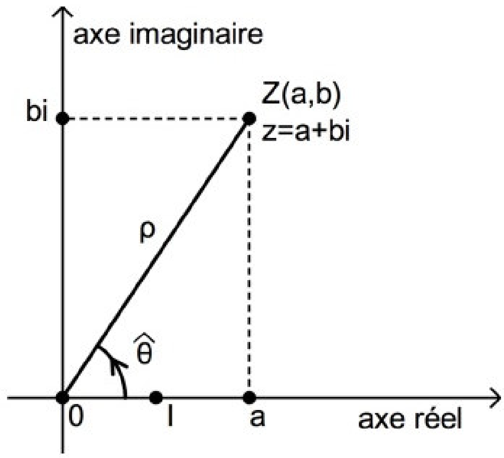
■

Argument

Pour $z \neq 0$, on définit $\arg(z) = \theta$ tel que

$$z = |z|(\cos\theta + i \sin\theta).$$

et



$$\cos\theta = \frac{x}{|z|} \text{ et } \sin\theta = \frac{y}{|z|}$$

Remarque 2.1 *On propose de rappeler le sinus et le cosinus de quelques angles connus.*

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\theta$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	-1	0
$\cos\theta$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1	0	1

L'argument d'un nombre complexe z n'est pas unique puisque $\theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ est aussi un argument de z.

Exemple 2.1 $z = -\sqrt{3} - i$ *alors* $|z| = \sqrt{4} = 2$ *et*

$$\cos\theta = \frac{-\sqrt{3}}{2} \text{ et } \sin\theta = \frac{-1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{-5\pi}{6}$$

On remarque que $\theta_1 = \frac{7\pi}{6}$ *est aussi un argument de* z.

Définition 2.1 *On appelle argument principal de z, $Argz$, l'unique angle entre $-\pi$ et π. La relation entre $Argz$ et* $\arg z$ *est*

$$\arg z = Argz + 2\pi k,\ \ k \in \mathbb{Z}$$

2.4 Forme trigonométrique et exponentielle

Si $z \neq 0$, on peut écrire $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = [r, \theta]\,, \qquad r = |z|,\ \theta = \arg(z)$.

Par **la formule d'Euler** on a:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta, \qquad z = re^{i\theta}.$$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Multiplication / division (formes polaires) :

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1},\ z_2 = r_2 e^{i\theta_2} \quad \Rightarrow \quad z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)},\ \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}.$$

Formule de De Moivre

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

Preuve: On démontre cette formule par réccurence.

La formule est vérifiée pour $n = 1$, donc

Supposons que

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

et vérifions que

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^{n+1} = \cos((n+1)\theta) + i\sin((n+1)\theta).$$

$$
\begin{aligned}
(\cos\theta + i\sin\theta)^{n+1} &= (\cos\theta + i\sin\theta)^n(\cos\theta + i\sin\theta) \\
&= \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)(\cos\theta + i\sin\theta) \\
&= \cos(n\theta)\cos\theta - i\sin(n\theta)\sin\theta + i(\sin(n\theta)\cos\theta + \cos(n\theta)\sin\theta) \\
&= \cos((n+1)\theta) + i\sin((n+1)\theta)
\end{aligned}
$$

■

Propriétés :

$$1)\ \arg(z_1 \times z_2) \equiv \arg(z_1) + \arg(z_2)\ [2\pi],$$

$$2)\ \arg(z^n) \equiv n\arg(z)$$

$$3)\ \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \equiv \arg(z_1) - \arg(z_2)\ [2\pi],$$

$$4)\ \arg(\overline{z}) \equiv -\arg(z)\ [2\pi], \qquad \arg(1/z) \equiv -\arg(z)\ [2\pi].$$

Preuve: 1) Soient $z_1 = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $z_2 = r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$

$$
\begin{aligned}
z_1 \times z_2 &= rr'(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta') + i(\cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta') \\
&= rr'(\cos(\theta+\theta') + i(\sin\theta + \theta'))
\end{aligned}
$$

ce qui implique que $\arg(z_1 \times z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$.

2) Soit $z = re^{i\theta}$ et $z^n = r^n e^{in\theta} = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$

ce qui implique que $\arg(z^n) = n\theta = \arg(z)$.

3)

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{re^{i\theta}}{r\prime e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$$

ce qui implique que $\arg(\frac{z_1}{z_2}) = \theta - \theta' = \arg(z_1) - \arg(z_2)$.

4)

$$\overline{z} = re^{-i\theta} = r(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$$

ce qui implique que $\arg(\overline{z}) = -\theta = -\arg(z)$. ■

2.5 Résolution d'équations complexes

Equations de la forme $z^n = w$

- Cas $n = 2$ et $w = a + ib$

  On cherche les nombres complexes $z = x + iy$ où $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $z^2 = w$

$$\begin{aligned} z^2 &= w \Leftrightarrow (x+iy)^2 = a + ib \\ &\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2ixy = a + ib \end{aligned}$$

  ce qui donne

$$\left\{ \begin{array}{c} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \\ \left|z^2\right| = w \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{cc} x^2 - y^2 = a & (1) \\ 2xy = b & (2) \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} & (3) \end{array} \right.$$

  En combinant $(1) + (3)$ et $(3) - (1)$, on obtient

$$\left\{ \begin{array}{c} 2x^2 = a + \sqrt{a^2 + b^2} \\ 2y^2 = -a + \sqrt{a^2 + b^2} \\ 2xy = b \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = \pm\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} \\ y = \pm\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} \\ 2xy = b. \end{array} \right.$$

  L'equation $2xy = b$ permet de déterminer le signe de x et y.

Exemple 2.2 *Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante: $z^2 = 8 - 6i$*

$$\begin{aligned} z^2 &= 8 - 6i \Leftrightarrow (x+iy)^2 = 8 - 6i \\ &\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2ixy = 8 - 6i \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\left\{ \begin{array}{c} x^2 - y^2 = 8 \\ 2xy = -6 \\ \left|z^2\right| = w \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{cc} x^2 - y^2 = 8 & \textit{(1)} \\ 2xy = -6 & \textit{(2)} \\ x^2 + y^2 = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10 & \textit{(3)} \end{array} \right.$$

En combinant (1)+(3) et (3)-(1), on obtient

$$\begin{cases} x^2 = \frac{18}{2} = 9 \\ y^2 = \frac{2}{2} = 1 \\ 2xy = -6. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 3 \\ y = \pm 1 \\ xy < 0. \end{cases} \Leftrightarrow z_1 = 3 - i, \; z_2 = -3 + i$$

- Cas $n \geq 3$ et $w = re^{i\theta}$, les solutions sont

$$z_k = \sqrt[n]{r}\, e^{i\left(\dfrac{\theta + 2k\pi}{n}\right)}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Exercice 8 *Résoudre dans $\mathbb{C}$ les equations suivantes:*

$$z^3 = 8, \qquad z^4 = 1 + i.$$

Solution :

1) On écrit $8 = 8e^{i0}$. Donc

$$z^3 = 8 \Leftrightarrow z_k = \sqrt[3]{8} e^{i\left(\dfrac{0 + 2k\pi}{n}\right)} = 2e^{i\left(\dfrac{2k\pi}{3}\right)}, \quad k = 0, 1, 2$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} z_0 &= 2e^{i\left(\dfrac{2 \times 0 \times \pi}{3}\right)} = 2, \\ z_1 &= 2e^{i\left(\dfrac{2 \times 1 \times \pi}{3}\right)} = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \\ z_2 &= 2e^{i\left(\dfrac{2 \times 2 \times \pi}{3}\right)} = 2\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right). \end{aligned}$$

2) On écrit $1 + i = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\dfrac{\pi}{4}}$, donc

$$z^4 = 1 + i \Leftrightarrow z_k = \sqrt[4]{\frac{\sqrt{2}}{2}} e^{i\left(\dfrac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{4}\right)} = \sqrt[4]{\frac{\sqrt{2}}{2}} e^{i\left(\dfrac{\pi}{16} + \dfrac{k\pi}{2}\right)}, \quad k = 0, 1, 2, 3$$

Les solutions sont :

$$
\begin{aligned}
z_0 &= \sqrt[4]{\frac{\sqrt{2}}{2}}e^{i\left(\frac{\pi}{16}+\frac{0\times\pi}{2}\right)} = \sqrt[4]{\frac{\sqrt{2}}{2}}e^{i\left(\frac{\pi}{16}\right)},\\
z_1 &= \sqrt[4]{\frac{\sqrt{2}}{2}}e^{i\left(\frac{\pi}{16}+\frac{\pi}{2}\right)} = \sqrt[4]{\frac{\sqrt{2}}{2}}e^{i\left(\frac{9\pi}{16}\right)},\\
z_2 &= \sqrt[4]{\frac{\sqrt{2}}{2}}e^{i\left(\frac{\pi}{16}+\pi\right)} = \sqrt[4]{\frac{\sqrt{2}}{2}}e^{i\left(\frac{17\pi}{16}\right)}.\\
z_3 &= \sqrt[4]{\frac{\sqrt{2}}{2}}e^{i\left(\frac{\pi}{16}+\frac{3\pi}{2}\right)} = \sqrt[4]{\frac{\sqrt{2}}{2}}e^{i\left(\frac{25\pi}{16}\right)}
\end{aligned}
$$

2.6 Ensembles de points (lieux géométriques)

On traduit des conditions algèbriques sur z en ensembles de points du plan complexe (lorsque $z = x + iy$ correspond au point $M(x, y)$).

- Cercle de centre a et rayon $R > 0$:

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| = R\}.$$

- Disque (intèrieur) de centre a et rayon R :

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < R\}.$$

- Médiatrice du segment $[AB]$ (avec affixes z_A, z_B) :

$$\{z \mid |z - z_A| = |z - z_B|\}.$$

- Lieu d'Apollonius : rapport constant des distances

$$\left\{z \mid \frac{|z - z_A|}{|z - z_B|} = k\right\} \quad (k > 0,\ k \neq 1)$$

  est un cercle (si $k \neq 1$), et si $k = 1$ c'est la médiatrice.

Exemples classiques

- $\{z \mid \arg(z) = \theta\}$: demi-droite issue de 0 avec direction θ (sans le point 0).
- $\{z \mid |z-3| = |z+2i|\}$: médiatrice du segment joignant 3 et $-2i$.
- $\{z \mid |z+1-2i| < \sqrt{5}\}$: disque de centre $-1+2i$ et rayon $\sqrt{5}$.

Exercice 9 *Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que* $|z-1| = 2|z+1|$.

Solution. Posons $z = x + iy$. Alors

$$|z-1|^2 = 4|z+1|^2 \iff (x-1)^2 + y^2 = 4[(x+1)^2 + y^2]$$

$$\begin{aligned} &\iff 3x^2 + 10x + 3 + 3y^2 = 0 \\ &\iff (x + \tfrac{5}{3})^2 + y^2 = \tfrac{16}{9}. \end{aligned}$$

Cette équation est équivalente a une équation de cercle (ou vide selon discriminant):

C'est un cercle de centre $(-\frac{5}{3}, 0)$ et de rayon $\frac{4}{3}$.

____M.KADA KLOUCHA.