Université Abou BakrBelkaïd-Tlemcen
Faculté des Sciences.
Département de Mathématiques
Licence 1 Mathématiques

A.U 2025-2026

Fiche 4 : Fonctions – Limites – Continuités /dérivations.

Exercice 1 :

1. Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes puis étudier la parité

$$f(x) = x^2 + \left[\frac{1}{1-[x^2]}\right], \qquad g(x) = \sqrt{4-|x-1|} \qquad h(x) = \begin{cases} -x^2 - x, & x \geq 0, \\ -x^2 + x, & x \leq 0. \end{cases}.$$

2. Etudier la pèriodicité de la fonction $\cos(x - \lfloor x \rfloor)$

Exercice 2 :

1. Calculer les limites suivantes

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}\right), \quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(nx)}{\sin(mx)}\right) \quad (m, n \neq 0),$$

2. Montrer, en utilisant la définition de la limite d'une fonction en un point, que

$$\lim_{x\to 0}(x^2 + x - 1) = -1, \quad \lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2 - x + 2}{x+3}\right) = \frac{1}{2}.$$

Exercice 3 :

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction suivante

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} x + \dfrac{\sqrt{x^2}}{x}, & \text{si } x < 0 \\ a & \text{si } x = 0 \\ b\,\dfrac{\sin(5x)}{x}, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

2. Déterminer a et b pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4

1. Soit la fonction

$$f(x) = \frac{1}{|x|+1}, \quad D_f = \mathbb{R}.$$

   (a) Donner D_f et montrer que f est 1-lipschitzienne dans D_f .

   (b) La fonction f est-elle uniformément continue, continue ?

2. Pour quelles valeurs du paramètre réeel a la fonction

$$f(x) = |x|^a \sin\frac{1}{x}$$

   est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

3. Soit f une fonction définie dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^9 + x + 2$.
   A l'aide d'une version du théorème des valeurs intermédiaires, montrer que la fonction admet au moins une racine réelle. Cette racine est elle unique ? justifier

Exercice 5 :

1. Calculer, à l'aide de la définition, les dérivées des fonctions $1/x$, $\sqrt{x}$, x^3.
2. Calculer les dérivées des fonctions suivantes (préciser les ensembles de définition des fonctions)
$$3^{\ln x} + 2^x, \qquad e^{-x}\cos(3x), \qquad \ln(\ln x)$$
3. Calculer puis montrer les dérivées n-iemes des fonctions
$$e^{ax}, \qquad \frac{1}{1-x}, \qquad (1+2x)^n, \qquad x^2 \sin x \text{ (supp)}$$

Exercice 6 :

1. Soit a et b deux nombres réels. On définit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par
$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} x + \dfrac{\sqrt{x^2}}{x}, & \text{si } x < 0 \\ a & \text{si } x = 0 \\ b\,\dfrac{\sin(5x)}{x}, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$
2. Déterminer a et b tels que f soit dérivable sur $\mathbb{R}$.
3. f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?

Exercice 7 :

1. Enoncé le théorème de Rolle
2. a) Vérifier que les hypothèses du théorème de Rolle s'appliquent à la fonction $f(x) = x^3 - x$ pour $-1 \leq x \leq 1$, puis trouver le point c qui satisfait la conclusion du théorème.
   b) Faire de meme pour $g(x) = \cos(2x)$ pour $0 \leq x \leq 2\pi$
   c) Pourquoi le théorème de Rolle ne s'appliquent pas a la fonction $f(x) = (x-1)^{-2}$ pour $0 \leq x \leq 2$.

Exercice 8 :(supp)

Soit f la fonction définie sur $]-\infty, 2]$, par $f(x) = 5 + \sqrt{2-x}$ et
g la fonction définie sur $[5, +\infty[$, par $g(x) = -x^2 + 10x - 23$.

1. Montrer que pour tout $x \in [5, +\infty[$, $(f \circ g)(x) = x$.
2. Montrer que pour tout $x \in]-\infty, 2]$, $(g \circ f)(x) = x$.
3. Est-ce que, dans cet exemple, $f \circ g = g \circ f$?

Exercice 9 : (supp)

1. Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes
$$f(x) = \frac{x+3}{2\,[x] - 1}, \qquad g(x) = \frac{x - \sqrt{|x^2 - 1|}}{\sqrt[3]{x^3 - 1}}, \qquad h(x) = \frac{\sqrt{\ln x}}{1 - \ln x}.$$
2. Vérifier si les fonctions suivantes sont strictement monotones sur leurs domaines de définitions
$$f_1(x) = \sqrt{x}, \qquad f_2(x) = x^3, \qquad f_3(x) = \frac{1}{x}$$
   Attention : n'utiliser que la définition d'une fonction monotone

3. Soit $X = [1, +\infty[$. Déterminer :

$$\sup X, \quad \max X, \quad \inf X, \quad \min X.$$

4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction quelconque.
   En posant $f_1(x) = f(x) + f(-x)$ et $f_2(x) = f(x) - f(-x)$.
   Montrer que f_1 est paire et que f_2 est impaire.

Exercice 10 : (supp)

1. Calculer les limites suivantes

$$\lim_{x\to 1^+} (\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^2}), \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x \ln x + 5}{x^2+4}.$$

2. Montrer, en utilisant la définition de la limite d'une fonction, que

$$\lim_{x\to 2} (3x+1 = 7), \qquad \lim_{x\to+\infty} (\frac{x+2}{x}) = 1$$

3. Les fonctions suivantes sont-elle prolongeables par continuété au point x_0 indiqué ? Si oui ecrire leur prolongée.

$$1) \ f(x) = \sin x \cos(\frac{1}{x}), \ (x_0 = 0), \qquad 2) \ g(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}, \ (x_0 = 1)$$

Exercice 11 : (supp)

1. (a) Calculer la dérivée de la fonction $e^{-x}\cos(3x)$ définie dans $\mathbb{R}$. En déduire la valeur de $\lim_{x\to 0^-} \frac{e^{-x}\cos(3x)-1}{x}$.
   (b) Etudier la dérivabilité des fonctions définies de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, par

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}\cos(3x), \text{ si } x < 0 \\ 1-x, \text{ si } x \geq 0 \end{cases}, \ g(x) = \begin{cases} e^{-x}\cos(3x), \text{ si } x < 0 \\ -1-x, \text{ si } x \geq 0 \end{cases},$$

2. Déterminer $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que f soit $\mathcal{C}^2$. Dans ce cas, est-elle aussi $\mathcal{C}^3$?

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0, \\ ax^2 + bx + c, & x \geq 0. \end{cases}$$