Université Abou BakrBelkaïd-Tlemcen
Faculté des Sciences.
Département de Mathématiques
Licence 1 Mathématiques

A.U 2025-2026

Fiche 3: Suites numériques.

Exercice 1

1. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de terme général $U_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$
   (a) Cette suite est-elle positive? négative?
   (b) Est-elle majorée? minorée?
   (c) Est-elle croissante? décroissante?
   (d) Que peut on dire pour les sous suites U_{2n} et U_{2n+1}
   (e) Pourquoi elle converge?
   (f) Pouvez-vous trouver toutes les valeurs de $n \in \mathbb{N}$ telles que $|U_n| \leq 10^3$.
2. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de terme général $U_n = \dfrac{n-2}{2n}$.
   Par deux méthodes différentes, montrer que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée.

Exercice 2

1. Déterminer les limites des suites numériques suivantes

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^5 5^n + n^7 7^n}{3^n + 8^n}\right), \quad \lim_{n\to+\infty}(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}), \quad \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2+k}\right)$$

2. En utilisant la définition de la limite, montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(-1)^n}{2n} = 0, \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{5n-1}{2n+1} = \frac{5}{2}, \quad \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{5} = 1, \quad \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty.$$

Exercice 3

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général u_n définie par

$$u_n = \frac{1 \times 3 \times ... \times (2n+1)}{3 \times 6 \times ... \times (3n+3)}.$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
2. Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 4

1. A l'aide de la règle **d'encadrement des gendarmes**, montrer que les suites suiantes sont convergentes

$$u_n = \frac{n^2 \sin(n^3+1)}{n^3+1}, \quad u_n = \frac{\cos(n)}{n+(-1)^n}, \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{n}{n^2+k}\right).$$

2. A l'aide des **sous-suites**, montrer que les limites suivantes n'existent pas

$$\lim_{n\to+\infty} \sin(\frac{n\pi}{2}), \quad \lim_{n\to+\infty} \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right),$$

Exercice 5
On considère la **suite récurente** (U_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = U_n^2 + \frac{2}{9} \text{ et } U_0 = \frac{1}{2}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{3} < U_n < \frac{2}{3}$.

2. Vérifier que U_n est monotone.

3. En déduire que U_n est convergente et donner sa limite.

Exercice 6
Dans chaque cas suivant étudier si les suites sont **adjacentes**.

1. $U_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{1+k^2}$ et $V_n = U_n + \frac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

2. $U_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ et $V_n = 1 + \sin(\dfrac{1}{n})$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 7

1. On considère la suite (U_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = \frac{4}{5}U_n + \frac{1}{5}$ et $U_0 = 0$.
   a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|U_{n+1} - U_n| = (\frac{4}{5})^n\,|U_1 - U_0|$.
   b) Déduire que (U_n) est de **Cauchy**, calculer alors la limite.

2. Montrer que la suite $U_n = \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2}$, est de **Cauchy**, que déduiser vous.

3. (**Supp**) Les suites suivantes sont-ellres de **Cauchy**

   (a) $U_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{2^2}{4^2} + ... + \frac{n^2}{4^n}$ (montrer d'abord que $4^n > n^4$, $n \geq 5$)

   (b) $U_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\cos k}{k!}$.

   (c) $U_n = \frac{1}{2^2} + \frac{2}{3^2} + ... + \frac{n}{(n+1)^2}$.

Exercice 8 (**Supp**)
On considère la suite (V_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} = \frac{V_n}{2} + \frac{3}{2V_n}$ et $V_0 = 1$.

1. Montrer que (V_n) est positive. Si elle devait converger, qu'elle serait sa limite?

2. Notons l la limite éventuelle selon la question précédente. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n - l > 0$.

3. En déduire que la suite est décroissante. Conclure.