

Fiche 2: Les nombres complexes.

Exercice 1

On considère le complexe $z = 1 + i\sqrt{3}$

1. En utilisant les propriétés, calculer $z + \bar{z}$ et $z - \bar{z}$.
2. Écrire z et $\bar{z}$ sous forme exponentielle et en déduire que $z^5 = 16 \times \bar{z}$.
3. En utilisant les propriétés, calculer $z^5 + \bar{z}^5$ et $z^5 - \bar{z}^5$.

Exercice 2

Soient

$$u = \left(\sqrt{2 + \sqrt{3}}\right) + i \left(\sqrt{2 - \sqrt{3}}\right), \quad v = -2 + i2\sqrt{3}$$

1. Calculer u^2 , puis déterminer le module et un argument de u^2 , puis écrire u^2 sous forme trigonométrique.
2. En déduire le module et un argument de u .
3. Déterminer $z = x + iy$ où $x, y \in \mathbb{R}$, tel que $z^2 = v$
4. Déduire les solutions de $\left(\frac{w+i}{w-i}\right) = z$ où w est un nombre complexe $w \neq i$

Exercice 3

Soient

$$u = 1 + i, \quad v = -1 + i\sqrt{3}.$$

1. Déterminer le module et l'argument de u et v .
2. Déduire le module et l'argument pour chacune des racines cubiques de u .
3. Déterminer le module et un argument de $\frac{u}{v}$.
4. En déduire les valeurs de $\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)$.

Exercice 4

1. Linéariser les expressions suivantes $(\cos x)^3$ puis $(\sin x)^4$ (formule d'Euler).
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes

$$iz^2 + 2z + (1 - i) = 0, \quad z^5 = \bar{z}$$

3. Déterminer dans chaque cas l'ensemble des points M du plan complexe d'affixe z tel que:

$$|z - (2 - i)| = \sqrt{2}, \quad |z + c| \leq |1 + \bar{c}z|, \quad c \in \mathbb{C}^*, \quad |c| < 1$$

Exercice 5 (Supp) On considère la fonction f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad z \neq -i, \quad f(z) = \frac{1 - z}{1 - iz}$$

Déterminer l'ensemble des points tels que $f(z) \in \mathbb{R}$ puis $f(z) \in i \times \mathbb{R}$.