Université Abou BakrBelkaïd-Tlemcen
Faculté des Sciences.
Département de Mathématiques
Licence 1 Mathématiques
A.U 2025-2026

Fiche 1: Les nombres réels.

Exercice 1

1. Montrer que, si a et p sont deux entiers naturels, tel que (p premier et p divise a^2) alors (p divise a).
2. Montrer que, si p est un nombre premier alors $\sqrt{p}$ n'est pas rationnel.

Exercice 2
Si $\mathbb{Q}$ désigne l'ensemble des nombres rationnels.

1. Demontrer que les nombres suivants $\sqrt{2}, \sqrt{6}, \sqrt{2}+\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.
2. Montrer que $\forall (p,q) \in \mathbb{N}$, $p \neq q$: $(\sqrt{p}+\sqrt{q}) \notin \mathbb{Q} \Rightarrow (\sqrt{p}-\sqrt{q}) \notin \mathbb{Q}$.
3. Montrer que si $p \in \mathbb{Q}$ et $q \notin \mathbb{Q}$ alors $p+q \notin \mathbb{Q}$.
4. Montrer que si $p \in \mathbb{Q}^*$ et $q \notin \mathbb{Q}$ alors $p \times q \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 3 Soient x et y deux réels, montrer que:

1. $$\max(x,y) = \frac{x+y+|x+y|}{2}, \ \min(x,y) = \frac{x+y-|x-y|}{2}.$$
2. $|x+y| \leq |x| + |y|$
3. $|x| + |y| \leq |x+y| + |x-y|$.
4. $||x| - |y|| \leq |x-y| \leq |x| + |y|$.

Exercice 4 (On note $[x]$, la partie entière de x)

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et l'inégalité suivantes
$$[\frac{2x+1}{3}] - \frac{2}{3} = 0, \qquad -1 \leq [3x] \leq 1, \qquad [x] + |x-1| = x$$
2. Montrer que $\forall p \in \mathbb{Z}$ on à $[p] + [-p] = 0$.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on à $[x+n] = [x] + n$ puis $[\frac{1}{n}[nx]] = [x]$.
4. (**Supp**) Montrer que $\forall\ x, y \in \mathbb{R}$, on a
$$[x] + [y] \leq [x+y] \text{ puis } [x+y] \leq [x] + [y] + 1.$$

Exercice 5 Soit les sous ensembles suivants:

$$A = \{x \in \mathbb{R}, 0 < x \leq 2\},\ B = \left\{5 - \frac{2}{\sqrt{n}},\ n \in \mathbb{N}^*\right\},\ C = \{\frac{1}{x-1}, x \geq 2\},\ D = \{\frac{1}{p} + \frac{1}{q};\ p, q \in \mathbb{N}^*\}$$

1. Pour chaque ensemble proposé, déterminer (si elles existent) : la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément.
2. Pour les ensembles (A,B,C),justification à l'aide de la caractérisation " ε".
3. Pour l'ensemble D, justification à l'aide de la caractérisation séquentielle.

Exercice 6
Soient A et B deux parties non vides bornéé de $\mathbb{R}$. Montrer que

1. Si $(A \subset B) \Rightarrow (\inf B \leq \inf A)$, puis $(\sup A \leq \sup B)$
2. $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A,\ \sup B\}$.
3. $\inf(A \cup B) = \min\{\inf A,\ \inf B\}$.(**Supp**)

Exercice 7 (**Supp**)
Soient x et y deux réels, montrer que:

1. $$|x + y| = |x| + |y| \iff xy \geq 0$$
2. $$1 + |xy - 1| \leq (1 + |x - 1|)(1 + |y - 1|).$$
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \dfrac{|x|}{1 + |x|}$. Montrer que $\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x + y) \leq f(x) + f(y)$.

Exercice 8 (**Supp**) Soit les sous-ensembles suivants:

$$A = \{\frac{n}{2n+1}, n \in \mathbb{N}\},\ B = A \cup \{\pi\},\ C = \left\{\frac{(-1)^n + 3}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\},$$

$$D = \{x \in \mathbb{R}.\, |x - [(2 - \pi)]| \leq 3\},\ E = \left\{\frac{x+1}{x+2},\ x \in \mathbb{R}, x \leq -3\right\},\ F = \{0,25; 0,2525; ...; 0,252525...\}$$

1. Déterminer (si elles existent): les bornes supérieures et inférieures,Justifier.
2. Les ensembles possède-t-elles un maximum, un minimum? Justifier
3. Montrer que l'ensemble B n'est pas un intervalle de $\mathbb{R}$