

Exercice 1. *Tout ensemble peut être défini par une description en compréhension ou en extension ; par exemple l'ensemble des entiers impairs est décrit en compréhension par $\{n \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k + 1\}$ et en extension par $\{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.*

1. *Décrire en compréhension ensuite en extension l'ensemble $\{1, 2, 4, 8, 16, \dots\}$.*
2. *Décrire en compréhension l'ensemble $[1, 2[$.*
3. *Décrire en extension l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$.*
4. *Décrire en compréhension l'ensemble des antécédents d'un réel y par une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$*

Exercice 2. *Soit A, B, C des sous-ensembles de E . Montrer que*

1. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$,
2. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$,
3. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
4. $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$.

Exercice 3. *Soit A, B deux sous-ensembles de E . Montrer que.*

1. $A \cup B = A \cap B \iff A = B$,
2. $A \cap B = A \iff A \subseteq B$
3. $(A \cap \mathcal{C}_E B) \cup (\mathcal{C}_E A \cap B) = A \cup B \iff A \cap B = \emptyset$
4. $\mathcal{C}_E A \setminus \mathcal{C}_E B = B \setminus A$.
5. $\mathcal{C}_E(\mathcal{C}_E A) = A$.
6. $\mathcal{C}_E(A \cup B) = \mathcal{C}_E A \cap \mathcal{C}_E B$.

Exercice 4. *Soit A, B deux parties de E , on appelle différence symétrique de A et B l'ensemble*

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

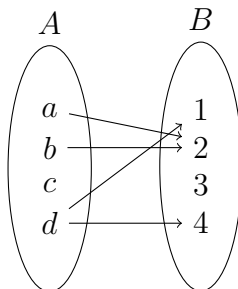
Montrer que

1. $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
2. $A \Delta B = A \Delta C \iff B = C$.

Exercice 5. *Soit A, B deux parties de E . Résoudre dans $\mathcal{P}(E)$ l'équation d'inconnu l'ensemble X ,*

$$A \cap X = B.$$

Exercice 6. *Soit $f = (A, \Gamma, B)$ une relation entre les deux ensembles A, B ; définie par son diagramme sagittal*



1. S'agit il d'une fonction ?
2. Déterminer le graphe de cette relation.

Exercice 7. Soit A une partie d'un ensemble E . On appelle fonction indicatrice de l'ensemble A , l'application $\chi_A : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Déterminer l'ensemble pour lequel $1 - \chi_A$ est fonction indicatrice.

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{x}{x+1}$.
Déterminer $\underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}}(x)$.

Exercice 9. Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

1.

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \\ n &\mapsto n + 1 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} f_2 : \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z} \\ n &\mapsto n + 1 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} f_3 : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (x + y, x - y) \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} f_3 : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto z^2 \end{aligned}$$

Exercice 10. *Soit*

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$$
$$n \mapsto \begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ pair} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que f est bien définie et bijective.

Exercice 11. *Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin x$.*

- 1. Déterminer est l'image directe par f de $\mathbb{R}$, $[0, 2\pi]$, $[0, \frac{\pi}{2}]$.*
- 2. Déterminer l'image réciproque par f de $[0, 1]$, $[3, 4]$, $[1, 2]$.*

Exercice 12. *Soit f une application d'un ensemble E vers un ensemble F . Montrer les deux équivalences suivantes.*

$$f \text{ injective} \iff \forall X \in \mathbb{P}(E), X = f^{-1}(f(X))$$
$$f \text{ surjective} \iff \forall Y \in \mathbb{P}(E), f(f^{-1}(Y)) = Y.$$