

TD n° 4

Exercice 1.

Soient $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace probabilsable et $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une application, posons

$$\sigma_X = \{X^{-1}(A); A \subset \mathbb{R}\}.$$

Montrer que σ_X est une tribu sur Ω , elle est appelée la tribu engendrée par X .

Exercice 2.

Soient $\lambda > 0$, X une v.a.r positive telle que

$$\mathbb{P}(a < X \leq b) = \lambda \int_a^b e^{-\lambda t} dt,$$

pour tout $0 \leq a < b$.

- Calculer F_X la f.r. de X .
- On pose $Y = [X] + 1$, où $[x]$ désigne la partie entière de x . Déterminer $\mathbb{P}(Y = k)$, $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 3.

Soit p la fonction définie par

$$p(x) = c \frac{(x-1)}{n} \quad \text{si } x \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

- Déterminer la valeur de c pour que p soit la fonction de masse d'une v. a. r. X .
- Déterminer dans ce cas F_X .
- Calculer $\mathbb{P}(X \leq 3)$, $\mathbb{P}(1 < X \leq 5)$ et $\mathbb{P}(X > n-2)$.
- Calculer la moyenne de X .

Exercice 4.

Soit X une variable aléatoire discrète de fonction de masse :

$$p_X(k) = \frac{e^{-2} 2^k}{4k!} (1 + ck), \quad k \in \mathbb{N}.$$

- Déterminer c .
- Soient Y , Z deux variable aléatoire de Poissons de paramètre 2. Montrer que

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{4} \mathbb{P}(Y = k) + \frac{3}{4} \mathbb{P}(Z = k-1).$$

— En déduire $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 5.

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = cxe^{-\frac{x}{2}} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x).$$

- Déterminer la valeur de c pour que f soit une fonction de densité d'une variable aléatoire X .
- Calculer la fonction de répartition de X .
- Calculer la moyenne et la variance de X .
- Posons $Y = X^2$.
 - Déterminer F_Y et f_Y .
 - Calculer $\mathbb{E}(Y)$ par deux méthodes.

Exercice 6.

La durée de vie d'une machine est modélisée par une variable aléatoire X . D'après des études statistiques, on sait que ce type de machine fonctionne encore après 9 ans avec une probabilité 0.1. On propose

$$f(x) = \frac{a}{(x+1)^b} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x).$$

Comme fonction de densité pour cette variable aléatoire.

- Déterminer les constantes a et b .
- Calculer la durée moyenne de fonctionnement pour ce type de machine.
- Quelle est la probabilité que cette machine fonctionne encore après 12 ans.

Exercice 7.

Soient ϵ une var discrète avec $\mathbb{P}(\epsilon = 1) = \mathbb{P}(\epsilon = -1) = 1/2$ et X une var avec

$$f(x) = e^{-x} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x).$$

Posons $Y = \epsilon X$ et supposons que ϵ et X sont indépendantes (i.e. Les événements $\{\epsilon \in A\}$ et $\{X \in B\}$ sont indépendants pour tout $A, B \in \mathbb{B}_{\mathbb{R}}$).

- Donner la loi de $-\epsilon$.
- Calculer F_Y et f_Y .
- En déduire $\mathbb{E}(Y)$ et $Var(Y)$.