Université de Tlemcen
Faculté des Sciences
L2 Mathématiques
Probabilités

2024/2025

TD n° 3

Exercice 1.

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, I\!P)$ un espace de probabilités, $A, B, C \in \mathcal{F}$ avec $I\!P(A \cap B \cap C) > 0$. Montrer que

(1) $I\!P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1 - I\!P(B) I\!P(A/B)$.

(2) $\frac{I\!P(A/(A \cup B))}{I\!P(B/(A \cup B))} = \frac{I\!P(A)}{I\!P(B)}$.

(3) $I\!P(A \cap B/(B \cup C)) = I\!P(A \cap B/B) I\!P(B/(B \cup C))$.

(4) $I\!P(A/B) I\!P(B/C) I\!P(C/A) = I\!P(B/A) I\!P(C/B) I\!P(A/C)$.

(5) $I\!P(B \cap C/A) = I\!P(C/A) I\!P(B/(A \cap C))$.

Exercice 2.

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, I\!P)$ un espace de probabilités, $B \in \mathcal{F}$ avec $I\!P(B) > 0$. Montrer que l'application : $A \mapsto I\!P(A/B)$ définit une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$.

Exercice 3.

Dans une université 70% sont des garçons. 60% des garçons fument ainsi que 40% des filles. les étudiants sont enregistrés par un numéro d'inscription. Un numéro est tiré au hasard.

(1) Quelle est la probabilité que le numéro tiré corresponde à une personne qui fume ?

(2) Si on sait que le numéro tiré correspond à une personne qui fume, quelle est la probabilité que ce soit une fille ?

Exercice 4.

La ville de Strasbourg contient 82% d'alsaciens et 18% de personnes d'origines non alsaciènnes. 25% des alsaciens parle allemand, 5% de personnes d'origine non alsaciènne parle allemand. Un touriste allemand est en visite à Strasbourg, il demande à un strasbourgeois choisi au hasard de lui indiquer le chemin du parlement européen.

(1) Quelle la probabilité que ce Strasbourgeois parle allemand ?

(2) La personne choisie parle effectivement allemand, quelle est la probabilité quelle soit alsaciènne ?

Exercice 5.

Une école prestigieuse exige de ces candidats de passer un test avant d'accepter leurs candidature. Un bon candidat a 85% de chance de réussir le test alors qu'un candidat faible n'a que 15% de chance de réussir le test. Des études statistiques ont montré qu'il y a en moyenne 40% de bon candidats.

(1) Quelle est la probabilité qu'un candidat choisi au hasard, réussisse le test.
(2) Un candidat a échoué au test, quelle est la probabilité qu'il soit bon.
(3) Quelle est la proportion des bons candidats qui ont réussi au test.

Exercice 6.

Soient A, B deux évènements de Ω. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
— Les évènements A et B sont indépendants.
— Les évènements $\overline{A}$ et B sont indépendants.
— Les évènements A et $\overline{B}$ sont indépendants.
— Les évènements $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

Exercice 7.

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, I\!P)$ un espace de probabilités, A, B deux éléments de $\mathcal{F}$. Montrer que

$$|I\!P(A) - I\!P(B)| \leq I\!P(A \Delta B).$$

Soient $A_1, \cdots, A_n, B_1, \cdots, B_n$ des éléments de $\mathcal{F}$ vérifiant $A_k \subset B_k$ pour $1 \leq k \leq n$. Montrer que

(1)
$$I\!P(\bigcup_{k=1}^{n} B_k) - I\!P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) \leq \sum_{k=1}^{n} (I\!P(B_k) - I\!P(A_k)).$$

(2)
$$I\!P(\bigcap_{k=1}^{n} A_k) \geq 1 - \sum_{k=1}^{n} I\!P(\overline{A_k}).$$