Université de Tlemcen
Faculté des Sciences
L2 Mathématiques
2024/2025
Probabilités

TD n° 2

Exercice 1.

Soient $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace probabilisable, A, B et C des évènements de Ω. En utilisant les opérations $\cap, \cup$ et le passage au complémentaire, exprimer les évènements suivants :

— E_1 : Aucun des évènements A, B et C ne se réalise.
— E_2 : B se réalise mais pas A et C.
— E_3 : Exactement deux évènements se réalisent.
— E_4 : Au moins l'un des évènements se réalise.
— E_5 : Au plus l'un des évènements se réalise.
— E_6 : Exactement un évènement se réalise.

Exercice 2.

Soient Ω un espace échantillon, $\mathcal{A}$ une algèbre sur Ω et $\mathcal{F}$ une tribu sur Ω.
1. Soient $A,\ B \in \mathcal{A}$, montrer que $A \backslash B \in \mathcal{A}$ et $A \Delta B \in \mathcal{A}$.
2. Montrer que si $n \geq 1$ et $A_1, A_2, ..., A_n$ des éléments de $\mathcal{A}$, alors

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{A} \quad \text{et} \quad \bigcap_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{A}.$$

3. Montrer que si $\{A_1, A_2, ...,\}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{F}$, alors

$$\bigcap_{k \geq 1} A_k \in \mathcal{F}.$$

Exercice 3.

1. Soient Ω un espace échantillon, $\mathcal{A}_1,\ \mathcal{A}_2$ deux algèbres sur Ω et $\mathcal{F}_1,\ \mathcal{F}_2$ deux tribus sur Ω.

(1) Montrer que $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$ est encore une algèbre.

(2) Montrer que $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ est encore une tribu.

2. Pour $A \in \Omega$ on rappelle que la **tribu engendrée** par A, notée $\sigma(A)$ est donnée par

$$\sigma(A) := \{\emptyset,\ \Omega,\ A,\ \bar{A}\}.$$

(1) Vérifier que $\sigma(A)$ est bien une tribu.

(2) Montrer par un choix convenable de $\Omega,\ A$ et B que $\sigma(A) \cup \sigma(B)$ n'est pas nécessairement une tribu. Tirer une conclusion.

Exercice 4. Soient $(\Omega, \mathcal{F}, I\!P)$ un espace de probabilité, $A,\ B,\ C$ et D des événements de Ω avec $C \subset D$.

(1) Montrer que $I\!P(\overline{A}) = 1 - I\!P(A)$.

(2) Trouver une equation entre $I\!P(C),\ I\!P(D)$ et $I\!P(D \backslash C)$ (il n'est pas interdit de dessiner).

(3) Ecrire D en fonction de C et en déduire que $I\!P(C) \leq I\!P(D)$ ($I\!P$ est croissante).

(4) Montrer que $I\!P(A \cup B) = I\!P(A) + I\!P(B) - I\!P(A \cap B)$.

Exercice 5.
Soient $(\Omega, \mathcal{F}, I\!P)$ un espace de probabilités, $A, B \in \mathcal{F}$ avec $I\!P(A) = 1/3,\ I\!P(B) = 1/4$ et $I\!P(A \cap B) = 1/6$. Calculer

$$I\!P(\overline{A}),\ I\!P(\overline{A} \cup B),\ I\!P(A \cup \overline{B}),\ I\!P(A \cap \overline{B}),\ I\!P(\overline{A} \cup \overline{B}).$$

Exercice 6.
On jette 3 dés équilibrés et on note les résultats de ces trois jets : a, b et c.

i. Déterminer Ω et $card(\Omega)$.

ii. On forme alors l'équation (E) : $ax^2 + bx + c = 0$. Calculer les probabilités des évènements suivants :

A : "Les racines de l'équation (E) sont réelles".

B : "Les racines de l'équation (E) sont complexes".

Exercice 7.
Dans une tombola il y a 120 tickets pour gagner 3 lots différents, pour chaque lot il y a 4 cadeaux et donc 4 tickets gagnants. Une personne achète 3 tickets.

1. Quelle est la probabilité que cette personne gagne un seul cadeau ?
2. Quelle est la probabilité que cette personne gagne au moins un cadeau ?
3. Quelle est la probabilité que cette personne un cadeau de tois lots différents ?