

# Série de TD N°3

## Exercice 1:

Calculer les limites des fonctions suivantes:

$$1) \lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^2} \right), \quad 2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x - 1}, n \in \mathbb{N}^* \quad 3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt{x}}{\ln(x) + x}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\sin^2(x)}, \quad 5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} \text{ (SUPP)}, \quad 6) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x} \text{ (SUPP)}$$

## Exercice 2:

Étudier la continuité des fonctions suivantes:

$$1) f(x) = \begin{cases} x + \frac{\sqrt{x^2}}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \quad 2) \text{(SUPP)} f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{|x|} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

## Exercice 3:

Établir si les fonctions suivantes sont prolongeable par continuité en  $x_0 = 0$ .

$$1) f(x) = \frac{e^x - 1}{\sqrt{|x|}}, \quad 2) \text{(SUPP)} f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} & \text{si } x > 0, \\ \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

## Exercice 4:

Étudier la dérivabilité sur  $\mathbb{R}$  des fonctions suivantes:

$$1) f(x) = x|x|, \quad 2) \text{(SUPP)} f(x) = \begin{cases} \frac{|x|\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x - 1} & \text{si } x \neq 1, \\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

## Exercice 5:

1) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que

$$\frac{1}{1+x} < \ln(1+x) - \ln(x) < \frac{1}{x}.$$

2) Calculer

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\ln(1+x) - \ln(x))$$

et en déduire

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x.$$