Série de TD N°2

Exercice 1:

Dans chacune des questions suivantes, on donne un ensemble E et des parties A et B de E. Déterminer explicitement les ensembles $A \cap B, A \cup B, A \cap C_E(B)$ ainsi que $C_E(A) \cap B$.

1. $E = \{1, 2, 3, 4\}, \quad A = \{1, 2\}, \quad B = \{2, 4\}$.
2. $E = \mathbb{R}, \quad A =]-\infty, 2], \quad B = [3, +\infty[$.

Exercice 2:

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$.
Déterminez les ensembles suivants:
$f([0, 1[), \quad f(]-1, 2[), \quad f^{-1}([1, 2[), \quad f^{-1}([-1, 1]), \quad f^{-1}(\{3\})$.

Exercice 3:

Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives?

1. f de $\mathbb{R}$ dans $[0, +\infty[$ définie par $f(x) = x^2$.
2. g de $[0, +\infty[$ dans $[0, +\infty[$ définie par $g(x) = x^2$.

Exercice 4:

Soit h l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $h(x) = \dfrac{4x}{x^2 + 1}$.

1. Vérifiez que pour tout réel a non nul, on a $h(a) = h(\frac{1}{a})$. L'application h est-elle injective?
2. Soit f définie sur $I = [1, +\infty[$ par $f(x) = h(x)$.
   (a) Montrez que f est injective.
   (b) Vérifiez que : $\forall x \in I, f(x) \leq 2$.
3. Montrez que f est une bijection de I sur $]0, 2]$ et trouvez f^{-1}.