Université Abou BakrBelkaïd-Tlemcen
Faculté des Sciences
Département d'informatiques

*Fiche de TD N°3*
Suites numériques.
$1^{ère}$ LMD $2024 - 2025$

**Exercice 1**

1. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de terme général $U_n = \dfrac{n-3}{3n}$.
   Par deux méthodes différentes, montrer que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée.
   $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est elle monotone?
2. Donner la définition mathématique d'une suite qui n'est pas décroissante.
3. Montrer que la suite de terme général $V_n = \frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N}^*$, n'est pas décroissante. Une suite non décroissante est-elle croissante?

**Exercice 2:** Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites définies par :

$$\begin{cases} U_{n+1} &= \dfrac{3U_n - 1}{-U_n + 3} \\ U_0 &= 2 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad V_{n+1} = \frac{U_n + 1}{U_n - 1}$$

1. Calculer $U_1$ et $U_2$, puis montrer par récurrence que pour tout $n \geq 2$, $U_n < -1$.
2. Montrer que pour tout $n \geq 2$, $U_n$ est croissante. En déduire la limite de la suite $(U_n)$.
3. Montrer que $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$. Exprimer $V_n$ en fonction de $n$.
4. En déduire $U_n$ en fonction de $n$ et retrouver que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

**Exercice 3**

1. En utilisant la définition de la limite, montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3n-1}{2n+1} = \frac{3}{2}, \qquad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{3} = 1, \qquad \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{5}{2}\right)^n = +\infty.$$

2. Déterminer les limites des suites numériques suivantes

$$\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+....+\frac{1}{2^n}), \qquad \lim_{n\to+\infty}(n-\sqrt{(n+1)(n-2)}), \qquad \lim_{n\to+\infty}(\frac{3+(\pi\times 7^n)}{5-(e\times 7^n)}).$$

$$\lim_{n\to+\infty}(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}), \quad \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{2n+1}{3n^2+k}\right), \quad \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}E(kx),\ x\in\mathbb{R}\right).$$

**Exercice 4**

Dans chaque cas suivant étudier si les suites sont adjacentes. Dans l'affirmative déterminer leur limite commune si c'est possible

1. $U_n = 3 - \dfrac{1}{n^2}$ et $V_n = 3 + \dfrac{1}{n^3}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
2. $U_n = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + ... + \frac{1}{n^3}$ et $V_n = U_n + \frac{1}{n^2}$.
3. $U_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2}$ et $V_n = U_n + \dfrac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. (**Supp**)
4. $U_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ *et* $V_n = 1 + \sin(\dfrac{1}{n}), \forall n \in \mathbb{N}^*$. (**Supp**)

**Exercice 5** (**Supp**)

On considère la suite $(U_n)$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = \dfrac{U_n}{2} + \dfrac{3}{2U_n}$ et $U_0 = 10$.

1. a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \geq 0$.
   b) si la suite $(U_n)$ converge, déterminer sa limite?
2. a) Notons $l = \lim\limits_{n \to +\infty} U_n$, Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n - l > 0$.
   b) En déduire que $(U_n)$ est décroissante, que peut-on conclure?

**Exercice 6** (**Supp**)

1. Montrer que les suites $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $U_n$ et $V_n$ définie par
$$U_n = \left( \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 + k} \right), \ V_n = \left( \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k} \right)$$
   sont convergentes et déterminer leur limites si possible.
2. Meme question pour les suites $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $W_n$ et $K_n$ définie par
$$W_n = \frac{1 \times 3 \times ... \times (2n+1)}{3 \times 6 \times ... \times (3n+3)}, \ K_n = \frac{n^2 \cos(n^3 + 1)}{n^3 + 1}$$