Université Abou BakrBelkaïd-Tlemcen
Faculté des Sciences
Département d'informatiques

Fiche de TD N°2
Les nombres complexes.
$1^{ère}$ LMD 2024 – 2025

Exercice 1

1. Écrivez les nombres complexes suivants sous la forme algébrique

$$\frac{1}{2+2i}, \qquad i(1+i)(1-i)^2, \qquad \frac{2+5i}{1-i}+\frac{2-5i}{1+i}$$

2. Mettre sous la forme trigonométrique (forme exponentielle) les nombres complexes suivants, ainsi que leurs conjuguées:

$$\frac{1}{2+2i}, \qquad \sqrt{3}+i, \qquad -1+i\sqrt{3} \qquad (\textbf{Facultatif}).$$

3. Etablir que

$$\frac{\sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{12})+i\sin(\frac{\pi}{12}))}{1+i}=\frac{\sqrt{3}-i}{2}.$$

$$(1-i)\times(\cos(\frac{\pi}{5})+i\sin(\frac{\pi}{5}))\times(\sqrt{3}-i)=2\sqrt{2}\times(\cos(\frac{13\pi}{60})-i\sin(\frac{13\pi}{60})). \qquad (\textbf{Facultatif})$$

4. Linéariser les expressions suivantes $(\cos x)^3$ puis $((\sin x)^4$ (**Facultatif**)).

Exercice 2
Soit les nombres complexes a et b tels que $a=\sqrt{3}+i$, $b=\sqrt{3}-1+i(\sqrt{3}+1)$.

1. Vérifier que $b=(1+i)a$.
2. En déduire que $|b|=2\sqrt{2}$ et $\arg(b)=\frac{5\pi}{12}$ $[2\pi]$.
3. En déduire de ce qui précède que: $\cos(\frac{5\pi}{12})=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Exercice 3

1. Calculer les racines carrées des nombres complexes suivants:

$$-1, \qquad i, \qquad 1+i, \qquad \frac{\sqrt{3}+i}{2} \qquad (\textbf{Facultatif})$$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes

$$z^2-(3+4i)z-1+5i=0, \qquad z^2=\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}, \qquad z^3+8=0, \qquad z^4+i=0.$$

Exercice 4

1. On considère la fonction f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad z \neq -i, \qquad f(z) = \frac{1-z}{1-iz}$$

   (a) Déterminer l'ensemble des points tels que $f(z) \in \mathbb{R}$ puis $f(z) \in i \times \mathbb{R}$.

2. (**Facultatif**) Déterminer dans chaque cas l'ensemble des points M du plan complexe d'affixe z tel que:

$$|z-(2-i)| = \sqrt{2}, \qquad |z-1-2i| = |z+2-i|, \qquad |\overline{z}-2i| = |z+2|.$$