Université Abou BakrBelkaïd-Tlemcen
Faculté des Sciences
Département d'informatiques

Fiche de TD N°1
Les nombres réels
$1^{ère}$ *LMD* 2024 – 2025

Exercice 1

1. Montrer que si a^2 est un multiple de 3, alors a est un multiple de 3.
2. Montrer que les nombres $\sqrt{3}$ et $\log_2(3)$ sont irrationnels.
3. Sachant que $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ et $\sqrt{6}$ sont irrationnels.
   Montrer que $(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6})$ est irrationnel.
4. Montrer que $\forall (p, q) \in \mathbb{N}$, $p \neq q$: $(\sqrt{p} + \sqrt{q}) \notin \mathbb{Q} \Rightarrow (\sqrt{p} - \sqrt{q}) \notin \mathbb{Q}$.
5. Sachant que π est irrationnel, démontrer que $\left(\frac{3}{\pi}\right)$ est irrationnel.
6. **(Facultatif)** Sachant que $\sqrt{2}$ est irrationnel
   (a) Montrer que $a = 6 + 4\sqrt{2}$ et $b = 6 - 4\sqrt{2}$ sont irrationels.
   (b) Calculer $\sqrt{a \times b}$ puis montrer que $(\sqrt{a} + \sqrt{b})$ est rationnel.

Exercice 2

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$: l'equation $|x - 1| + |x + 1| = 4$.
2. Soient x et y deux réels, montrer que:
   (a) $$|x| - |y| \leq |x - y|.$$
   (b) $$|x| + |y| \leq |x + y| + |x - y|.$$
3. **(Facultatif)**
   (a) $1 + |xy - 1| \leq (1 + |x - 1|)(1 + |y - 1|)$.
   (b) $\forall\ x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \dfrac{|x|}{1 + |x|}$.
   Montrer que, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$.

Exercice 3

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$
$$\begin{aligned} E\left(\frac{2x+1}{3}\right) - 2 &= 0, \quad E(x+a) = 2, a \in \mathbb{R}. \quad E(x^2 - x + 2) - x = -1, \\ E(x) &\geq 1, \quad -1 \leq E(3x) \leq 1, \quad E(x) + |x - 1| = x, \end{aligned}$$
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on à $E(x+n) = E(x) + n$ puis $E(\frac{1}{n}E(nx)) = E(x)$.
   où $E(.)$ désigne la partie entière d'un réel telle que $E(.) \in \mathbb{Z}$.
3. **(Facultatif)** Soient $x, y \in \mathbb{R}$, montrer que
$$E(x) + E(y) \leq E(x+y) \text{ puis } E(x+y) \leq E(x) + E(y) + 1.$$

Exercice 4

1. Donner la définition d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

2. Soit les sous-ensembles suivants:
   $A = \{x \in \mathbb{R},\ x^3 - 1 < 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R}, (x-3)(x+2) \geq 0\} \cap [-4, 4]$,
   $C = \{x \in \mathbb{R}^*,\ \dfrac{1}{|x|} > 1\}$, $D = \{x \in \mathbb{R},\ \ -1 \leq E(3x) \leq 1\} \cup [1, \pi[$.

   (a) Mettre ces ensembles sous la forme d'un intervalle de $\mathbb{R}$ ou une réunion d'intervalles.

   (b) Pour quoi l'ensemble C, n'est pas un intervalle?

   (c) Déterminer les majorants, les minorants, la borne supérieure et la borne inférieure dans $\mathbb{R}$ (si elles éxistes), et préciser s'il y a un maximum et un minimum.

Exercice 5

Soit les sous-ensembles suivants:
$A = \left\{\frac{x+1}{x+2},\ x \in \mathbb{R}, x \leq -3\right\}$, $\quad B = \left\{\frac{n+3}{n+2},\ n \in \mathbb{N}\right\}$, $\quad C = \left\{(-1)^n + \frac{1}{n^2},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$.
$D = \left\{2 - \frac{8}{n+4},\ n \in \mathbb{N}\right\}$, $\quad E = \left\{\frac{(-1)^n}{n+1} + \frac{(-1)^n+2}{3}\ ,\ n \in \mathbb{N}\right\}$.

Pour les ensembles (A, B, C seulement **"D et E Facultatif"**), Déterminer (s'ils existent) : les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément.

Exercice 6

A et B deux parties non vides bornéé de $\mathbb{R}$. Montrer que

1. Si $(A \subset B) \Rightarrow (\sup A \leq \sup B)$ et $(\inf B \leq \inf A)$.

2. $\inf(A \cup B) = \min\{\inf A,\ \inf B\}$

3. $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A,\ \sup B\}$. **(Facultatif)**