



T.D N°3 : Matrices et systèmes linéaires

Exercice 1 (Pour les étudiants)

On considère la matrice carrée d'ordre 2 suivante : $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$

- (1) Déterminer la matrice $B \in M_{(2)}$ telle que : $A = I_2 + 4B$
 où I_2 est la matrice unité d'ordre 2.
- (2) Calculer $A^2, B^2, AB, BA, {}^tA, {}^tB, {}^tB \cdot {}^tA, {}^t(A \cdot B), \text{tr}(A), \text{tr}(B)$.
- (3) Calculer $-A^2 + 2A - I_2$
- (4) En déduire que A est inversible et déterminer son inverse A^{-1} .

Exercice 2

Soient $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

- (1) Déterminer les matrices $A = {}^tM \cdot M$ et $B = A + I_3$, où tM est transposée de M et I_3 est la matrice unité d'ordre 3.
- (2) Calculer $\det(B)$, $B \cdot C$ et $C \cdot B$.
- (3) Résoudre le système (S) suivant par deux méthodes (inversion matricielle et Cramer)

$$(S) \begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + 3y + z = 5 \\ y + 2z = 3 \end{cases}$$

- (4) Déterminer les valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ pour que : $\det(B - \lambda I_3) = 0$.

Exercice 3

Soit A une matrice définie par : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

- (1) Trouver les réels a et b tels que : $A^2 = aI_3 + bA$ où I_3 est la matrice unité d'ordre 3.
- (2) En déduire que A est inversible et déterminer son inverse A^{-1} .
- (3) Calculer $\det(A)$. (4) (Supp) Retrouver l'inverse de A en utilisant la comatrice.
- (5) Considérons les systèmes suivants :

$$(S_1) \begin{cases} y + z = 1 \\ x + z = 0 \\ x + y = 3 \end{cases} \quad (S_2) (\text{SUPP}) \begin{cases} -x + y + z = 2 \\ x - y + z = 2 \\ x + y - z = 2 \end{cases}$$

- (i) Ecrire les deux systèmes (S_1) et (S_2) sous les formes matricielles $(DX = b)$.
- (ii) Résoudre ces systèmes par deux méthodes (**Inversion matricielle - Cramer**) (**Choisir une méthode**)

Exercice 4 (Voir cours)

On considère l'application linéaire $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par :

$$f(x, y, z) \mapsto (x - y, y + z)$$

Notons par $C_3 = \{e_1, e_2, e_3\}$ et $C_2 = \{i, j\}$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ respectivement.

Soient $D_3 = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ et $D_2 = \{i', j'\}$ deux autres bases de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ respectivement, où

$$e'_1 = (1, 1, 0), e'_2 = (1, 0, 1), e'_3 = (0, 1, 1),$$

$$i' = f(e_2) \text{ et } j' = f(e_3)$$

- (1) Déterminer la matrice A associée à l'application linéaire f relativement aux bases C_3 et C_2 .
- (2) Déterminer les matrices $P = P_{C_3 \rightarrow D_3}$ et $Q = P_{C_2 \rightarrow D_2}$ les matrices de passage de la base C_3 à la base D_3 et de C_2 à D_2 respectivement.
- (3) Déterminer la matrice $B = Q^{-1} \cdot A \cdot P$. Que représente la matrice B .

Exercice 5 (Devoir-Maison)

On définit les matrices carrées d'ordre 3, M , N et D par :

$$M = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3} \text{ où } m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \geq j \\ 0 & \text{si } i < j \end{cases}, N = (n_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3} \text{ où } n_{ij} = (-1)^{i+j} \text{ et } D = M + N - I_3 \text{ où } I_3 \text{ est la}$$

matrice unité d'ordre 3.

- (1) Ecrire explicitement les matrices M , N et D .
- (2) Montrer que la matrice D est inversible.
- (3) On considère le système (S) suivant :

$$(S) \begin{cases} x + y = 2 \\ -2x - y + z = -2 \\ -2x - 2y + z = -3 \end{cases}$$

(i) Ecrire le système (S) sous la forme matricielle $(AX = B)$.

(ii) Calculer $A \cdot D$ et $D \cdot A$.

(iii) Résoudre le système (S) par deux méthodes.

Exercice 6 (Devoir-Maison)

On considère le système (S) suivant :

$$(S) \begin{cases} x - 3y + 6z = 3 \\ 6x - 8y + 12z = 2 \\ 3x - 3y + 4z = 1 \end{cases}$$

- (1) Écrire le système (S) sous la forme matricielle $(AX = B)$.
- (2) Vérifier que la matrice A est inversible.
- (3) Calculer A^2 .
- (4) Déterminer les réels α et β tels que :

$$A^2 = \alpha A + \beta I_3$$

où I_3 est la matrice unité d'ordre 3.

- (5) Donner A^{-1} la matrice inverse de A .
- (6) Résoudre le système (S) .

Exercices supplémentaires

Exercice 1

(1) Déterminer la matrice carrée A d'ordre 3 définie par :

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3} \text{ où } a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \neq j \\ 0 & \text{si } i = j \end{cases}$$

(2) Calculer $\det(A)$ et en déduire que la matrice A est inversible.

(3) On considère le système (S) suivant :

$$(S) \begin{cases} -x + y + z = 1 \\ x - y + z = 1 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

(i) Ecrire le système (S) sous la forme matricielle $(DX = B)$.

(ii) Calculer $A \cdot D$ et $D \cdot A$.

(iii) En déduire que D est inversible et déterminer D^{-1} .

(iv) Résoudre le système (S) .

Exercice 2

$$\text{Soit } M = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 1 & -5 & -4 \end{pmatrix}$$

(1) Calculer $\det(M)$.

(2) Calculer $M^3 + 2M^2 - M$.

(3) Résoudre le système (S) suivant par deux méthodes : ('inversion matricielle - Cramer)

$$(S) \begin{cases} -3x + 2y + 2z = 1 \\ -2x + 5y + 4z = 7 \\ x - 5y - 4z = -8 \end{cases}$$

Exercice 3

On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par :

$$f(x, y) \mapsto (x - y, 2y, x + 3y)$$

Notons par $B_1 = \{e_1, e_2\}$, $B_2 = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ respectivement.

(1) Déterminer $M_f(B_1, B_2)$ la matrice associée à f relativement aux bases B_1 et B_2 .

(2) Considérons les deux autres bases B'_1 et B'_2 de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ respectivement définies par :

$$B'_1 = \{e'_1, e'_2\} \text{ et } B'_2 = \{\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \varepsilon'_3\}$$

$$\text{où } e'_1 = (1, 3), e'_2 = (2, 5), \varepsilon'_1 = (0, 1, 1), \varepsilon'_2 = (1, 0, 1) \text{ et } \varepsilon'_3 = (1, 1, 0).$$

(i) Déterminer les matrices $P = P_{B_1 \rightarrow B'_1}$ et $Q = P_{B_2 \rightarrow B'_2}$ les matrices de passage de B_1 à B'_1 et de B_2 à B'_2 respectivement.

(ii) Soient $u \in \mathbb{R}^2$ de composantes $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique B_1 de $\mathbb{R}^2$ et $v \in \mathbb{R}^3$ de

composantes $V' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la base B'_2 .

- Déterminer les composantes X' du vecteur u dans la base B'_1 et les composantes V du vecteur v dans la base canonique B_2 de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4

On considère l'endomorphisme $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tel que :

$$f(i) = i + 2j \text{ et } f(j) = 2i + j$$

où $B = \{i, j\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$

(1) Déterminer la matrice A associée à l'endomorphisme f relativement à la base canonique B .

(2) Soit $C = \{e_1, e_2\}$ une autre base de $\mathbb{R}^2$ où

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(i + j) \text{ et } e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-i + j)$$

-Déterminer la matrice de passage $P = P_{B \rightarrow C}$ de la base canonique B à la base C .

(3) Exprimer i et j en fonction de e_1 et e_2 . En déduire la matrice de passage $Q = P_{C \rightarrow B}$.

(4) Vérifier que $P^{-1} = Q$.

(5) Exprimer $f(e_1)$ et $f(e_2)$ en fonction de e_1 et e_2 . En déduire la matrice A' associée à l'endomorphisme f relativement à la base C .

(6) Vérifier que $A' = P^{-1} \cdot A \cdot P$ et exprimer A en fonction de A', P et P^{-1} .

Exercice 5

On note par $B_1 = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ ($f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$), dont la matrice dans B_1 est la matrice A

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

On pose $\varepsilon_1 = (1, 1, 1), \varepsilon_2 = (1, -1, 0), \varepsilon_3 = (1, 0, 1)$ et $B_2 = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$.

(1) Déterminer l'application f .

(2) Montrer que B_2 constitue une base de $\mathbb{R}^3$.

(3) Ecrire la matrice B de f dans cette base.

(4) Déterminer la matrice de passage P de la base B_1 à la base B_2 .

(4) Retrouver la matrice B de f dans la base B_2 en utilisant la matrice de passage P .