Université Abou Bekr Belkaid - Tlemcen | Année universitaire: 2024 - 2025
Faculté des sciences | Module: Algèbre 2
Département de mathématiques | L1 Math + MI

T.D N°2 : Applications linéaires

Exercice 1

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = (2x - y, 3x + y)$.
(1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
(2) Déterminer $\ker(f)$. f est-elle injective?
(3) Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2

On considère l'application f définie par :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^3 \\ (x,y) &\mapsto \big(2x - 2y,\ -x + y,\ 3y - 3x\big) \end{aligned}$$

(1) Montrer que f est linéaire.
(2) Déterminer l'image du vecteur $v = (1,1)$ par f.
(3) Existe-il un vecteur $u = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $f(u) = \big(0,\ 1,\ 0\big)$?
(4) Donner une base de $\ker(f)$ et une base de $\mathrm{Im}(f)$.
(5) Montrer par deux méthodes que f n'est ni injective ni surjective.

Exercice 3

Soit $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}^3$

$$P \mapsto (P(1), P'(1), P(0)).$$

Soit $\{P_0, P_1, P_2\}$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$c'est-à-dire les polynômes définis par $P_0(x) = 1, P_1(x) = x$ et $P_2(x) = x$.
(1) Déterminer $f(P_0), f(P_1)$ et $f(P_2)$.
(2) Montrer que f est une application linéaire.
(3) Déterminer $\ker(f)$. f est-elle injective?
(4) En déduire $rg(f)$. f est-elle surjective?

Exercice 4 (*Supplémentaire*)

Soient $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -x+y-z=0\}$ et f une application définie par :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) &\longmapsto \big(x+y,\ y-z,\ z+x\big) \end{aligned}$$

(1) On admet que F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Déterminer sa dimension.
(2) Prouver que f est une application linéaire.
(3) Montrer que $\ker(f) = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y+x=0$ et $z+x=0\big\}$.
(4) Déterminer $\dim(\ker(f))$ et en déduire $rg(f)$, le rang de f.
(5) f est-elle injective? Surjective? Justifier votre réponse.
(6) A-t-on $\mathbb{R}^3 = \ker(f) \oplus F$

Exercice 5 (**Devoir-maison**)

On considère l'application T définie par :

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}_2[X] &\longrightarrow \mathbb{R}_3[X] \\ P &\longmapsto (X^2+1)P' \end{aligned}$$

(1) Montrer que T est linéaire.
(2) Déterminer $\ker(T)$, le noyau de T et en déduire $rg(T)$, le rang de T.
(3) T est-elle injective? Surjective?.

Exercice 6 (**Devoir-maison**)

On considère l'application f définie par :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) &\longmapsto (x-y, y+z) \end{aligned}$$

(1) Montrer que f est une application linéaire.
(2) Montrer que $\ker(f)$ est un $s.e.v$ de $\mathbb{R}^3$.
(3) Déterminer $\dim(\ker(f))$. f est-elle injective?
(4) En déduire $rg(f)$. f est-elle surjective?