



T.D N°1 : Espaces vectoriels

Exercice 1

(1) Soit $E = \mathbb{R}^{**}$ muni d'une loi interne \oplus définie par : $\forall a, b \in E : a \oplus b = ab$,
et d'une loi externe \otimes tel que : $\forall a \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R} : \lambda \otimes a = a^\lambda$.

Montrer que (E, \oplus, \otimes) est un \mathbb{R} -espace vectoriel.

(2) Soit U l'ensemble des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

- Montrer que $(U, +, \cdot)$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel.

Exercice 2

Parmi les ensembles F dire lesquels sont des s.e.v de E dans chaque cas :

(1) $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + 2y + 3z = 1\}$. (2) $E = \mathbb{R}^2$, $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 2x - y = 0\}$

(3) $E = \mathbb{R}^2$, $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$, (4) $E = \mathbb{R}[X]$, $F = \{P \in \mathbb{R}[X]; \deg(P) = 2\}$

(5) $E = \mathbb{R}[X]$, $F = \mathbb{R}_2[X] = \{P \in \mathbb{R}[X]; \deg(P) \leq 2\}$

(6) $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ensemble des suites réelles, $F = \{(u_n) \in E : f \text{ est croissante}\}$

(7) $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $F = \{f \in E; f(1) = 0\}$, (8) $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $F = \{f \in E; f(0) = 1\}$.

Exercice 3

Soient $u = (1, 2, 3)$ et $v = (2, 3, 1)$ deux vecteurs de \mathbb{R}^3 .

(1) Ecrire les vecteurs $w_1 = (1, 3, 8)$ et $w_2 = (2, 4, 5)$ comme combinaison linéaires de u et v .

(2) Déterminer le réel k pour que le vecteur $w = (1, k, -2)$ soit combinaison linéaire de u et v .

Exercice 4

Soient $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = y = z\}$ et $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = 0\}$

(1) Montrer que U et W sont des s.e.v de \mathbb{R}^3

(2) Montrer que : $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$

Exercice 5

(1) Montrer que : $S = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ est une base de \mathbb{R}^3 .

(2) Trouver les composantes de $v = (1, 1, 2)$ et $w = (2, 3, 4)$ dans la base canonique de \mathbb{R}^3 et dans la base S .

(3) Déterminer les composantes des vecteurs de la base canonique dans la base S .

Exercice 6

(1) Montrer que $B = \{1, X + 1, (X + 1)^2\}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

(2) Déterminer les composantes du polynôme $Q(X) = X^2$ dans la base B .

Exercice 7

Soient $E = \text{Vect}\{(1, 1, 0), (-3, 0, 1)\}$, le s.e.v de \mathbb{R}^3 engendré par $B = \{(1, 1, 0), (-3, 0, 1)\}$
et $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y + 2x = 0 \text{ et } z - x = 0\}$.

(1) Montrer que F est un s.e.v de \mathbb{R}^3 .

(2) Trouver une base pour E et une base pour F et en déduire les dimensions de E et F .

(3) Montrer que si $u = (x, y, z) \in E$, alors $y = x + 3z$.

(4) Montrer que les s.e.v E et F sont supplémentaires dans \mathbb{R}^3 .

EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

Exercice 1

- (1) Montrer que : $F = \{(X-1)^3, (X-1)^2, (X-1), 1\}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
- (2) Trouver les composantes du polynôme $P(X) = 3X^3 - 4X^2 + 2X - 5$ dans cette base.

Exercice 2

Soient $A = \{(x, y, z) : x - y + 3z = 0\}$ et $B = \text{Vect}\{(1, -2, 1)\}$, le s.e.v de \mathbb{R}^3 engendré par $(1, -2, 1)$.

- (1) Montrer que A est un s.e.v de \mathbb{R}^3 .
- (2) Trouver $\dim(A)$ et $\dim(B)$.
- (3) Montrer que si $v = (x, y, z) \in B$, alors $y = -2x$ et $z = x$;
- (4) Montrer que $\mathbb{R}^3 = A \oplus B$.

Exercice 3

Soit $\mathbb{R}_1[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 1 et $B = \{1, x\}$ sa base canonique.

- (1) Vérifier que $\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} : a + bx = \frac{a-b}{2}(1-x) + \frac{a+b}{2}(1+x)$
- (2) Déterminer les réels α et β tels que : $\forall x \in \mathbb{R}, \alpha(1-x) + \beta(1+x) = 0$.
- (3) En déduire que : $C = \{1-x, 1+x\}$ est une base de $\mathbb{R}_1[X]$.
- (4) Déterminer les composantes du vecteur $P(x) = 3 + 2x$, ainsi que les vecteurs de la base canonique B dans la base C .

Exercice 4

Soient $F = \text{Vect}\{u_1, u_2\}$ le s.e.v de \mathbb{R}^3 engendré par $\{u_1, u_2\}$ où $u_1 = (1, 0, -1), u_2 = (0, 1, -1)$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y = x + z = 0\}$.

- (1) Montrer que $\{u_1, u_2\}$ est libre.
- (2) Montrer que G est un s.e.v de \mathbb{R}^3 .
- (3) Montrer que si $(x, y, z) \in F$ alors $x + y + z = 0$.
- (4) Déterminer une base pour F et une base pour G et en déduire $\dim(F)$ et $\dim(G)$.
- (5) Déterminer $F \cap G$ et en déduire que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

Exercice 5

Soient

$$U_1 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a = c\}, U_2 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a + b + c = 0\} \text{ et } U_3 = \{(0, 0, c) : c \in \mathbb{R}\}$$

- (1) Montrer que : $U_i, i = 1, 3$ sont des s.e.v de \mathbb{R}^3 .
- (2) Montrer que : $\mathbb{R}^3 = U_1 + U_2, \mathbb{R}^3 = U_2 + U_3, \mathbb{R}^3 = U_1 + U_3$.
- (3) Déterminer $\dim U_1, \dim U_2$ et $\dim U_3$.
- (4) Dans quel cas la somme est directe.

Exercice 6

Soient $A = \{(x+y, y-3x, x) : x, y \in \mathbb{R}\}$ et $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = -2x = -2z\}$.

- (1) Vérifier que A et B sont deux s.e.v de \mathbb{R}^3 .
- (2) Déterminer $\dim A$ et $\dim B$.
- (3) Montrer que $A \oplus B = \mathbb{R}^3$.

Exercice 7

Soit $E = \mathbb{R}_1[X], E_1 = \{P \in E; P(-X) = P(X)\}$ et $E_2 = \{P \in E; P(-X) = -P(X)\}$.

- (1) Montrer que E_1 et E_2 sont des s.e.v de E .
- (2) Montrer par deux méthodes que $E = E_1 \oplus E_2$.

Exercice 8

Soient $E = \text{Vect}\{(1, 1, 1)\}$ et $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\}$

- (1) Montrer que F est un s.e.v de \mathbb{R}^3 et déterminer sa dimension.
- (2) Trouver $E \cap F$
- (3) Montrer que $\mathbb{R}^3 = E \oplus F$.