Université Abou Bekr Belkaid - Tlemcen
Faculté des sciences
Département de mathématiques

Année universitaire: 2024 - 2025
Module: Algèbre 2
L1 Math+MI

T.D N°01 : Structures Algébriques

Exercice 1

On définit sur $\mathbb{R}$ les lois $*$ et $\perp$ par : $\forall x,y \in \mathbb{R},\ x * y = x + y - 1,\ \ x \perp y = x + y - xy$

(1) Vérifier que $*$ et $\perp$ sont deux lois de composition internes sur $\mathbb{R}$.

(2) Les lois $*$ et $\perp$ sont-elles commutatives et associatives?

(3) Quels sont les éléments neutres et les éléments symétrisables pour les lois $*$ et $\perp$?

(4) $(\mathbb{R}, *)$ est-il un groupe abélien?

(5) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$x * 0 = 2 \text{ et } 3 * x * x = 5.$$

(6) On définit l'application

$$f : (\mathbb{R}, *) \longrightarrow (\mathbb{R}, +) \text{ par : } \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x - 1.$$

Montrer que f est un morphisme de groupes.

(7) Montrer que la loi $\perp$ est distributive par rapport à la loi $*$.

(8) Montrer que $(\mathbb{R}, *, \perp)$ est un corps commutatif.

(9) Résoudre dans $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ les équations suivantes :

$$x \perp 2 = 1 \text{ et } x \perp x \perp (-1) = -1.$$

Exercice 2 (Anneau des entiers de Gauss)

On appelle entier de Gauss tout nombre complexe de la forme $a + ib$ où a et b sont des entiers relatifs. On note $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib\ :\ (a,b) \in \mathbb{Z}^2\}$, l'ensemble des entiers de Gauss.

(1) Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un anneau commutatif pour l'addition et la multiplication des nombres complexes.

(2) Déterminer les éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}[i]$.

Exercice 3

Soit $(A, +, \cdot)$ un corps non commutatif d'éléments neutres 0 et 1 pour l'addition $(+)$ et la multiplication $(\cdot)$ respectivement.

Pour chaque $a \in A$, on définit l'application

$$f_a : A \longrightarrow A \text{ par : } \forall x \in A,\ f_a(x) = a \cdot x \cdot a^{-1}$$

(i) Calculer $f_a(1)$.

(ii) Montrer que f_a est un automorphisme de corps.

Exercice 4 $(SUPP)$

On note $\mathbb{D} = \left\{ \dfrac{n}{10^k}\ :\ n \in \mathbb{Z} \text{ et } k \in \mathbb{N} \right\}$, l'ensemble des nombres décimaux.

- Montrer que $\mathbb{D}$ est un sous-anneau de $(\mathbb{Q}, +, \times)$.

Exercice 5 $(SUPP)$

Soit $(G, \star)$ un groupe d'élément neutre e et $a \in G$. On défénit une loi de composition interne $\top$ sur G par : $\forall x,y \in G,\ x \top y = x \star a \star y$.

(1). Montrer que $(G, \top)$ est un groupe.

(2). Soit $(H, \star)$ un sous-groupe de $(G, \star)$ et $K = \{a^{-1} \star x\ :\ x \in H\} = a^{-1} \star H$.

Montrer que $(K, \top)$ est un sous-groupe de $(G, \top)$.

(3). On définit l'application $f_a\ :\ (G, \star) \ \longrightarrow (G, \top)$ par: $\forall x \in G,\ f_a(x) = x \star a^{-1}$.

Montrer que f_a est un isomorphisme (morphisme bijectif) de $(G, \star)$ vers $(G, \top)$.