TD n° 1 de Mécanique

Analyse dimensionnelles et calcul d'incertitudes

Exercice 1

Trouver la dimension des grandeurs physique suivantes :
La surface, Volume, Masse volumique, Fréquence, Vitesse linéaire, Vitesse angulaire, Accélération linéaire, Accélération angulaire, Force, Travail, Energie, Puissance, et la Pression.

Exercice 2

L'équation caractéristique d'un fluide à température constante est de la forme suivante :

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = c$$

Ou **p** est la pression et **V** est le volume.
Déterminer les dimensions des grandeurs a, b et c.

Exercice 3

Vérifier l' homogénéité de cette formule : s'écrit sous cette formule :

$$p = \rho g h_1 + h_2 F$$

Tels que : P la préssion, ρ la masse volumique, g une accélération de la pesanteur, h_1 et h_2 sont des hauteurs et F une force.

Exercice 4

1- Dans un fluide, une bille de rayon **(نصف القطر) r** animée d'une vitesse *v*, est soumise à une force de frottement donnée par $F = -6\pi\eta\, rv$, où η est la viscosité du fluide.
   Quelle est la dimension de η ?

2- Lorsque la bille est lâchée sans vitesse initiale à l'instant t = 0, sa vitesse s'écrit pour t > 0:
$v = a\left(1 - exp\left(-\frac{t}{b}\right)\right)$
Où a et b sont deux grandeurs qui dépendent des caractéristiques du fluide. Quelles sont les dimensions de a et b ?

Exercice 5

Le son émis par le fil d'une guitare se caractérise par sa fréquence f. Cette fréquence est en fonction de la force F de la tension du fil, de la longueur L et de la masse volumique ρ du fil.
Trouver l'expression de la fréquence f en la supposant de la forme : $f = K F^a L^b \rho^c$
(Avec K une constante sans dimension et la dimension de la fréquence $[f]=T^{-1}$).

Exercice 6

A. La quantité de mouvement P (P=m.v avec m est une masse et v est une vitesse) associée à un photon dépend de sa fréquence **f** selon l'expression suivante :

$$\boldsymbol{P = \sigma^{\alpha} f^{\beta} c^{\gamma}}$$

Ou **c** est la **vitesse** de la lumière et σ a la dimension suivante $[\sigma] = \mathrm{M.L^2.T^{-1}}$.

En utilisant l'analyse dimensionnelle, trouvé les exposants $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ **et** $\boldsymbol{\gamma}$.

B. La vitesse moyenne des molécules d'un gaz s'écrit sous la formule suivante :

$$\boldsymbol{\vartheta} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{PV}}{\boldsymbol{m}}}$$

m étant la masse de la molécule, **V** le volume, et **p** la pression du gaz.

1- Calculer l'incertitude relative sur $\boldsymbol{\vartheta}$ en fonction de **Δp, Δm et ΔV.**

Exercice 7

La vitesse limite atteinte par un parachute lesté est fonction de son poids P et de sa surface S, est donnée par : $v = \sqrt{\frac{P}{K.S}}$

1) Donner la dimension de la constante k.

2) Calculer la vitesse limite d'un parachute ayant les caractéristiques suivantes :

M=90 kg, S=80 m2, g=9,81 m/s2, et k=1,15 MKS.

3) Le poids étant connu à 2 % près et la surface à 3 %, calculer l'incertitude relative $\frac{\Delta v}{v}$ sur la vitesse *v*, ainsi l'incertitude absolue Δ*v* et déduire l'écriture condensée de cette vitesse.

Exercices suplimentaires

Exercice 1

La hauteur H d'un liquide de masse M contenu dans un cylindre de rayon R est donnée par la relation :

$$H = \frac{(2.\sigma.cos\alpha)}{(R.g.\rho)}$$

Où α est l'angle de contact liquide-cylindre, ρ la masse volumique du liquide et g l'accélération de pesanteur.

1- En utilisant les équations aux dimensions, trouver la dimension de σ.
2- Déterminer l'incertitude relative sur σ en fonction des incertitudes absolues ΔR, Δg, ΔM et Δα.

Exercice 2

La fréquence f de résonance d'un circuit électrique est donnée par la formule :

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{L.C}}$$

L et C sont connus avec des incertitudes absolues ΔL et ΔC.

Déterminer en fonction de L, C, ΔL et ΔC les incertitudes absolue et relative sur f avec les deux méthodes différentielles.

Corrigés des exercices

Exercice 1

- La surface :

On à [l]=L, [t]=T et [m]=M.

[Grandeur Physique]= $M^x L^y T^z$

$S = l \times l \implies$ [S]=L.L=L^2 $\implies$ [S]=L^2 l'unité est (m^2)

- Le volume :

V=l×l×l $\implies$ [S]=L.L.L=L^3 $\implies$ [V]=L^3 l'unité est (m^3)

- La masse volumique :

$\rho = \frac{m}{V}$ donc $[\rho] = \frac{[m]}{[V]} = \frac{M}{L^3} = ML^{-3} \implies$ [ρ]=ML^{-3} l'unité est (kg/m^3)

- La fréquence :

$f = \frac{1}{T} \implies [f] = \frac{1}{[T]} = \frac{1}{T} = T^{-1} \implies$ [f]=T^{-1} l'unité est (s^{-1} ou Hertz)

(Période $[T] = T$; l'unité « s »)

- La vitesse linéaire :

$v = \frac{dx}{dt} \implies [v] = \frac{[x]}{[t]} = \frac{L}{T} = LT^{-1} \implies [v] = LT^{-1}$ l'unité est (m./s)

- La vitesse angulaire :

$\omega = \theta^{\cdot} = \frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{R} \implies [\omega] = \frac{[\theta]}{[t]} = \frac{1}{T} = T^{-1} \implies$ [ω]=T^{-1} l'unité est (Rd/s)

$[angle]$ =1 mais son unité est Radian « Rd »

- L'accélération linéaire :

$a = \frac{dv}{dt} \implies [a] = \frac{[dv]}{[dt]} = \frac{LT^{-1}}{T} = LT^{-2} \implies [a] = LT^{-2}$ l'unité est (m./s^2)

- L'accélération angulaire :

$\omega^{\cdot} = \theta^{\cdot\cdot} = \frac{d\theta^{\cdot}}{dt} \implies [\omega^{\cdot}] = \frac{[d\theta^{\cdot}]}{[dt]} = \frac{T^{-1}}{T} = T^{-2} \implies [\omega^{\cdot}]=T^{-2}$ l'unité est (Rd./s^2)

- La force :

$F = m \times a \implies [F]=[m]\times[a]=M.L.T^{-2} \implies [F]=MLT^{-2}$ l'unité est (kg.m.s^{-2} ou Newton)

- Le travail :

$W = F\times d\times \cos\alpha \implies [W]=[F]\times[d]\times[\cos\alpha]=MLT^{-2}.L.\ 1=ML^2T^{-2}$ l'unité est (kg.m^2.s^{-2} ou Joule)

- L'énergie :

$E_C = (½).m.\ v^2 \implies [E]=[1/2].[m].[v]^2 = ML^2T^{-2}$ l'unité est le Joule

$E_P = m.g.h \implies [E]=[m].\ [g].\ [h]= M.LT^{-2}\ .L= ML^2T^{-2}$ l'unité est le Joule

- La puissance :

$P = W/t \implies [P]=[W]/[t]=(ML^2T^{-2})/T=ML^2T^{-3}$ l'unité est (kg.m^2.s^{-3} ou Watt)

- La pression :

$P = F/S \implies [P] = [F]/[S]=(MLT^{-2})/L^2=ML^{-1}T^{-2}$ l'unité est (kg.m^{-1}.s^{-2} ou Pascal).

Résumé

Grandeur physique	Symbole de la grandeur	Formule utilisée	Dimension	Unité (SI)
Surface	S	l×l	L^2	m^2
Volume	V	l×l×l	L^3	m^3
Masse volumique	ρ	m/V	ML^{-3}	Kg./m^3
Fréquence	F	1/T	T^{-1}	s^{-1} ou hertz
Vitesse linéaire	V	dx/dt	LT^{-1}	m/s^1
Vitesse angulaire	Ω	dθ/dt	T^{-1}	Rd./s^1
Accélération linéaire	γ	dv/dt	LT^{-2}	m./s^2
Accélération angulaire	ω·	dθ·/dt	T^{-2}	Rd./s^2
Force	F	m.a	MLT^{-2}	Newton

Travail	W	F.d	$ML^2 T^{-2}$	Joule
Energie	E	(½)mv^2	ML^2T^{-2}	Joule
Puissance	P	W/t	ML^2T^{-3}	Watt
Pression	$\wp$	F/S	$ML^{-1}T^{-2}$	Pascal

Exercice 2

On a $\left(P+\frac{a}{V^2}\right)\times(V-b)=C$

G=A+B ou G=A-B   Alors [G]=[A]=[B]

$[b] = [V] = L^3$

$[\frac{a}{V^2}] = [P]= \frac{[a]}{[V]^2} \Longrightarrow [a] = [P]\times[V]^2 = M.L^{-1}T^{-2}\ .L^6 = M.L.^5T^{-2}$

$$[C]=\left[P+\frac{a}{V^2}\right]\times[V-b]$$

D'autre part : $\left[P+\frac{a}{V^2}\right]=[p]=\left[\frac{a}{V^2}\right]et\ [V-b]=[V]=[b]$

Et $[C]=[P]\times[V]=ML^{-1}T^{-2}\ .\ L^3=ML^2T^{-2}$

Exercice 3

Vérifier l'homogénéité de cette formule : $p=\ \rho g h_1+h_2F$

Tels que : P une pression, g une accélération de la pesanteur, h_1 et h_2 sont des hauteurs et F une force. On a $\begin{cases}[\mathrm{P}]=\mathrm{M}L^{-1}T^{-2}\\ [\mathrm{g}]=LT^{-2}\\ [h_1]=[h_2]=L\\ [F]=MLT^{-2}\\ [\rho]=ML^{-3}\end{cases}$

cette équation est homogène si $[p]=[\rho g h_1]=[h_2F]$

$$[\rho g h_1]=ML^{-3}.L.LT^{-2}=\mathrm{M}L^{-1}T^{-2}=[\mathrm{P}]$$

$$et\ [h_2F]=\mathrm{M}L^2T^{-2}\neq \mathrm{M}L^{-1}T^{-2}$$

Donc l'équation est hétérogène (non homogène).

Exercice 4

On a $F = -6\pi\eta r v$

1- $[\eta] =?$

$$F = -6\pi\mu r v \implies \eta = -\frac{F}{6\pi r v}$$

$$[\eta] = \frac{[F]}{[r][v]} \quad \text{avec} \begin{cases} [r] = L \\ [F] = MLT^{-2} \\ [v] = LT^{-1} \\ [-6\pi] = 1 \end{cases}$$

D'où

$$[\eta] = \frac{MLT^{-2}}{L.LT^{-1}} = ML^{-1}T^{-1}$$

2- On a $v = a\left(1 - exp\left(-\frac{t}{b}\right)\right)$

On cherche les dimensions [a] et [b]

L'argument de l'exponentielle est sans dimension donc :

donc $[v] = LT^{-1} = [a]$

$\implies [a]=LT^{-1}$

$$\left[exp\left(-\frac{t}{b}\right)\right] = 1 \Rightarrow \left[-\frac{t}{b}\right] = \left[-1.\frac{t}{b}\right] = [-1]\left[\frac{t}{b}\right] = \left[\frac{t}{b}\right] = 1$$

$$\Rightarrow \left[\frac{t}{b}\right] = \frac{[t]}{[b]} = 1$$

$[b] =[t]= T$

Exercice 5:

Le son émis par le fil d'une guitare se caractérise par sa **fréquence f.** **$f=K F^a L^b \rho^c$** Avec K une constante sans dimension, **F : une force, L: une longueur et ρ: la masse volumique**.

$f=K F^a L^b \rho^c$; Cette fonction est homogène donc $[f] = [k][F]^a[L]^b[\rho]^c$

$$\text{Avec} \begin{cases} [F] = [m.a] = [m][a] = M.\ LT^{-2} \\ [L] = L \quad et \quad [k] = 1 \\ [\rho] = \left[\frac{m}{V}\right] = ML^{-3} \\ [f] = T^{-1} \end{cases}$$

Donc $[f] = (MLT^{-2})^a (L)^b (ML^{-3})^c = T^{-1}$

$\Longrightarrow M^0 L^0 T^{-1} = M^{a+c} L^{a+b-3c} T^{-2a}$

$$Par\ idenfication: \begin{cases} a + c = 0 \\ a + b - 3c = 0 \\ -2a = -1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} a = 1/2 \\ b = -a + 3c = -\frac{4}{2} = -2 \\ c = -a = -1/2 \end{cases}$$

$$F = K F^{1/2} L^{-2} \rho^{-1/2} = K\sqrt{F}\frac{1}{L^2}\frac{1}{\sqrt{\rho}}$$

donc $f = k\frac{\sqrt{F}}{L^2\sqrt{\rho}}$

Exercice 6

A- La quantité de mouvement P est donnée par l'expression suivante : 2.5 pts

$$P = \sigma^\alpha f^\beta c^\gamma = mv \quad \text{D'où } [P] = M.L^1.T^{-1}$$

$$\text{Car} \begin{cases} [v] = [c] = L.T^{-1} \\ [f] = T^{-1} \\ [M] = M \end{cases} \quad \text{avec } [\sigma] = \mathrm{M.L^2.T^{-1}}$$

$$\Longrightarrow [P] = [\sigma]^\alpha [f]^\beta [c]^\gamma = (M.L^2.T^{-1})^\alpha (T^{-1})^\beta (L\ .T^{-1})^\gamma$$

$$\Longrightarrow [P] = M^1 L^1 T^{-1} = M^\alpha L^{2\alpha+\gamma} T^{-\alpha-\beta-\gamma}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ 2\alpha + \gamma = 1 \\ -(\alpha + \beta + \gamma) = -1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \gamma = -1 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{P = \sigma.f.c^{-1}}$$

B- L'incertitude relative sur v. (2.5pts)

$$\boldsymbol{\vartheta = \sqrt{\frac{PV}{m}}}$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{\vartheta^2} = \boldsymbol{\frac{PV}{m}} \Longrightarrow \log(\boldsymbol{\vartheta^2}) = \log\boldsymbol{\frac{PV}{m}}$$
$$\Longrightarrow 2\log\vartheta = \log P + \log V - \log m$$
$$\Longrightarrow 2\frac{d\vartheta}{\vartheta} = \frac{dP}{P} + \frac{dV}{V} + \frac{dm}{m}$$

$$\Longrightarrow 2\frac{\Delta\vartheta}{\vartheta} = \frac{\Delta P}{P} + \frac{\Delta V}{V} + \frac{\Delta m}{m}$$
$$\Longrightarrow \frac{\Delta\vartheta}{\vartheta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta P}{P} + \frac{\Delta V}{V} + \frac{\Delta m}{m}\right)$$

Exercice 7

1- La dimension de k :

on a $\begin{cases} [p] = M.L.T^{-2} \\ [S] = L^2 \\ [k] = 1 \\ [v] = L.T^{-1} \end{cases}$ $\quad et\ k = \frac{p}{v^2.s} \Rightarrow [k] = \frac{[p]}{[v]^2.[s]}$

$\Rightarrow [k] = [p].[v]^{-2}.[s]^{-1} \quad \Rightarrow [k] = M.L^{-3}$

2- A.N : $v = \sqrt{\frac{P}{K.S}} = 3.097m/s$

3- $\frac{\Delta P}{P} = 2\% = 0.02$ et $\frac{\Delta S}{S} = 3\% = 0.03$

On utilisant la méthode logarithmique pour calculer l'incertitude relative sur v :

$$v = \sqrt{\frac{P}{K.S}} \Rightarrow \log v = \log\sqrt{\frac{P}{K.S}} = \frac{1}{2}log\,P - \frac{1}{2}logk - \frac{1}{2}\log S$$

$$\Rightarrow d\log v = \frac{1}{2}dlog\,P - \frac{1}{2}dlogk - \frac{1}{2}\text{dlog}\,S$$

$\frac{dv}{v} = \frac{1}{2}\frac{dp}{p} - \frac{1}{2}\frac{dS}{S} \Rightarrow \frac{\Delta v}{v} = \frac{1}{2}\left|\frac{\Delta p}{p}\right| + \frac{1}{2}\left|-\frac{\Delta S}{S}\right| \Rightarrow \frac{\Delta v}{v} = \frac{1}{2}\frac{\Delta p}{p} + \frac{1}{2}\frac{\Delta S}{S}$ A.N : $\frac{\Delta v}{v} = 0.025$

L'incertitude absolue sur v est donnée par :

$\Delta v = v.\frac{\Delta v}{v} = v * \left(\frac{1}{2}\frac{\Delta p}{p} + \frac{1}{2}\frac{\Delta S}{S}\right) = 0.077m/s$

d'où l'écriture condensée de v est donnée par : v=(3.097±0.077)m/s

Exercices supplimentaires :

Exercice 1

1- $H = \frac{(2.\sigma.cos\alpha)}{(R.g.\rho)} \Longrightarrow \sigma = \frac{HR\rho g}{2cos\alpha}$

$$d'ou\ [\sigma] = \frac{[H][R][\rho][g]}{[2][cos]}$$

$$\text{On a}\begin{cases}[H] = L\\ [R] = L\\ [\rho] = ML^{-3}\\ [g] = LT^{-2}\\ [2] = [cos\alpha] = 1\end{cases}$$

$\Rightarrow [\sigma] = L.L.M.L^{-3}.LT^{-2} = MT^{-2}$

Donc $[\sigma] = MT^{-2}$

2- Calculons l'incertitude relative sur σ, Δσ/σ = f (Δm, ΔR, Δg, Δα) :

On a, $\sigma = \frac{HR\rho g}{2cos\alpha}$ or $\rho = la\ masse\ volumique = \frac{M}{V} = \frac{M}{H\pi R^2}$

Donc

$$\sigma = \frac{HR\frac{M}{H\pi R^2}g}{2cos\alpha} = \frac{Mg}{2\pi Rcos\alpha}$$

a- Méthode logarithmique :

$$log\sigma = \log\left(\frac{Mg}{2\pi Rcos\alpha}\right) = logMg - \log(2\pi Rcos\alpha)$$

$$\Longrightarrow log\sigma = logM + logg - log2\pi - logR - logcos\alpha$$

$$\Longrightarrow dlog\sigma = dlogM + dlogg - dlog2\pi - dlogR - dlogcos\alpha$$

$$=\frac{d\sigma}{\sigma} = \frac{dM}{M} + \frac{dg}{g} - \frac{dR}{R} - \frac{dcos\alpha}{cos\alpha}$$

$$= \frac{d\sigma}{\sigma} = \frac{dM}{M} + \frac{dg}{g} - \frac{dR}{R} - \frac{sin\alpha}{cos\alpha}d\alpha$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{\frac{\Delta\sigma}{\sigma} = \frac{\Delta M}{M} + \frac{\Delta g}{g} + \frac{\Delta R}{R} + |tg\alpha|\Delta\alpha}$$

b- Méthode de la différentielle totale :

$$d\sigma = \frac{\partial\sigma}{\partial M}dM + \frac{\partial\sigma}{\partial R}dR + \frac{\partial\sigma}{\partial g}dg + \frac{\partial\sigma}{\partial\alpha}d\alpha$$

Avec $\begin{cases} \dfrac{\partial\sigma}{\partial g} = \dfrac{M}{2\pi R cos\alpha} \\ \dfrac{\partial\sigma}{\partial M} = \dfrac{g}{2\pi R cos\alpha} \\ \dfrac{\partial\sigma}{\partial R} = \dfrac{-Mg}{2\pi R^2 cos\alpha} \\ \dfrac{\partial\sigma}{\partial\alpha} = \dfrac{Mg}{2\pi R}.\dfrac{sin\alpha}{cos^2\alpha} \end{cases}$

D'où

$$d\sigma = \frac{g}{2\pi R cos\alpha}dM + \frac{-Mg}{2\pi R^2 cos\alpha}dR + \frac{M}{2\pi R cos\alpha}dg + \frac{Mg}{2\pi R}.\frac{sin\alpha}{cos^2\alpha}d\alpha$$

$$\Longrightarrow d\sigma = \underbrace{\left(\frac{Mg}{2\pi R cos\alpha}\right)}_{=\sigma}\left[\left(\frac{1}{M}\right)dM + \left(\frac{-1}{R}\right)dR + \left(\frac{1}{g}\right)dg + \left(\frac{sin\alpha}{cos\alpha}\right)d\alpha\right]$$

$$\Longrightarrow \frac{d\sigma}{\sigma} = \frac{dM}{M} + \frac{-dR}{R} + \frac{dg}{g} + \frac{sin\alpha}{cos\alpha}d\alpha$$

Donc $\boldsymbol{\dfrac{\Delta\sigma}{\sigma} = \dfrac{\Delta M}{M} + \dfrac{\Delta R}{R} + \dfrac{\Delta g}{g} + |tg\alpha|\Delta\alpha}$

Exercice 2

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{L.C}}$$

a- **<u>1er Méthode</u> : La différentielle totale**

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial L}\right)dL + \left(\frac{\partial f}{\partial C}\right)dC$$

Avec $\begin{cases} \left(\dfrac{\partial f}{\partial L}\right) = \dfrac{1}{2\pi}.\dfrac{-C}{2LC\sqrt{LC}} = \dfrac{1}{2\pi}.\left(\dfrac{-1}{2L\sqrt{LC}}\right) \\ \left(\dfrac{\partial f}{\partial C}\right) = \dfrac{1}{2\pi}.\dfrac{-1}{2C\sqrt{LC}} \end{cases}$

Donc

$$df = \frac{1}{2\pi}.\left(\frac{-1}{2L\sqrt{LC}}\right)dL + \frac{1}{2\pi}.\frac{-1}{2C\sqrt{LC}}dC$$

$$\Longrightarrow df = \left(\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}\right).\left[\left(\frac{-1}{2L}\right)dL + \frac{-1}{2C}dC\right]$$

$$\Longrightarrow \frac{df}{f} = \left[\left(\frac{-1}{2L}\right)dL + \frac{-1}{2C}dC\right]$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta f}{f} = \left|\frac{-1}{2L}\right| \Delta L + \left|\frac{-1}{2C}\right| \Delta C$$

$\Rightarrow \frac{\Delta f}{f} = \frac{1}{2L}\Delta L + \frac{1}{2C}\Delta C$ est l'incertitude relative sur f.

Et $\Delta f = \left(\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}\right).(\left|\frac{-1}{2L}\right|\Delta L + \left|\frac{-1}{2C}\right|\Delta C)$

$\boldsymbol{\Delta f = \left(\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}\right).(\frac{1}{2L}\Delta L + \frac{1}{2C}\Delta C)}$ est l'incertitude absolue sur f.

b- **<u>2er Méthode :</u> La différentielle logarithmique**

On a $f = \frac{1}{2\pi\sqrt{L.C}} \Rightarrow \; logf = log\frac{1}{2\pi} - \frac{1}{2}logL - \frac{1}{2}logC$

$$\Rightarrow \; dlogf = dlog\frac{1}{2\pi} - \frac{1}{2}dlogL - \frac{1}{2}dlogC$$

$$\Rightarrow \frac{df}{f} = -\frac{1}{2}\frac{dL}{L} - \frac{1}{2}\frac{dC}{C}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta f}{f} = \left|-\frac{1}{2}\right|\frac{\Delta L}{L} + \left|-\frac{1}{2}\right|\frac{\Delta C}{C}$$

D'où l'incertitude relative sur f est :

$$\boldsymbol{\frac{\Delta f}{f} = \frac{1}{2}\frac{\Delta L}{L} + \frac{1}{2}\frac{\Delta C}{C}}$$

Et l'incertitude absolue sur f :

$$\boldsymbol{\Delta f = f\left(\frac{1}{2}\frac{\Delta L}{L} + \frac{1}{2}\frac{\Delta C}{C}\right)}$$